Mathematikunterricht zwischen Konstruktion und Instruktion
Evaluation einer Lernwerkstatt im 11.Jahrgang mit integriertem Einsatz von Computeralgebra

Dissertation zum Erwerb des Grades
Dr.rer.nat.)
Fachbereich Mathematik
Universität Duisburg-Essen

Gutachter/in:
Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker,
Universität Duisburg-Essen
Prof. Dr. Stephan Hußmann,
Universität Dortmund

vorgelegt von Bärbel Barzel, geb. in Trier

Disputation: 2. Juni 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **7**

I „Das ABC der ganzrationalen Funktionen“ – Das Unterrichtsmaterial **11**

2 Allgemeine Hinweise für Lehrpersonen **15**

3 Das Schülerheft **21**

4 Anmerkungen zu den Bausteinen im Lehrerheft **39**

II „Das ABC der ganzrationalen Funktionen“ – Theoretischer Hintergrund zur Konzeption und Entwicklung **43**

5 Zum Inhalt **49**

5.1 Beschreiben von Zusammenhängen aus Natur & Gesellschaft . 51

5.1.1 Allgemeine Gedanken 51

5.1.2 Umsetzungen in der Lernwerkstatt 55

5.2 Funktionsuntersuchung als mathematischer Gegenstand 57

5.2.1 Allgemeine Gedanken 57

5.2.2 Umsetzung in der Lernwerkstatt 61

5.3 Funktionsuntersuchung als Handlungsfeld 64

5.3.1 Allgemeine Gedanken 64

6 Zum Rechnereinsatz 73

6.1 Was man unter Computeralgebra versteht 74
6.2 Entwicklung in den Ländern 75
6.3 Computeralgebra als Unterrichtsmedium 83
6.4 Bedeutung für den Lernprozess 91
6.4.1 Ergebnisse zum Einfluss von GTR auf das Lernen . . . 91
6.4.2 CAS-spezifische Ergebnisse 95
6.5 Lehren mit CAS 101

7 Zur Methode 109

7.1 Die Notwendigkeit des Freiraums beim Lernen 109
7.2 Zur Frage der Unterrichtsorganisation 114
7.3 Was ist eine Lernwerkstatt? 118
7.4 Entscheidungen bei der Lernwerkstatt 123

III Die Studie - Konzeption und Auswertung 127

8 Zur Konzeption der Studie 131

8.1 Die Forschungsfrage 133
8.2 Aufbau und Methodologie der Gesamtstudie 135
8.2.1 Pilotierung 137
8.2.2 Die qualitative Studie 138
8.2.3 Die quantitative Studie 142

9 Auswertung der qualitativen Studie 145

9.1 Transkriptanalyse „Legespiel – Was gehört zusammen?“ 145
9.1.1 Merkmale und Struktur des Gesprächsverlaufs 146
9.1.2 Analyse der einzelnen Phasen 149
9.1.3 Untersuchung hinsichtlich der unterschiedlichen Lösungsstrategien 156
9.1.4 Erkenntnisse aus der Analyse 159
9.2 Transkriptanalyse: „Was ist ein Wendepunkt?“ 163

9.2.1 Merkmale und Struktur des Gesprächs 164
9.2.2 Gedanken zur hier intendierten Begriffsbildung 169
9.2.3 Analyse der einzelnen Phasen 170
9.2.4 Erkenntnisse aus der Analyse 183
9.3 Vergleichende Analyse von Klausurlösungen 188

10 Auswertung der quantitativen Studie 195
10.1 Die Auswertung des vergleichenden Abschlusstests 195
10.2 Konzeption der Abschlussbefragung 196
10.3 Auswertung des Schüler-Fragebogens 201
10.3.1 Auswertung der Items mit Ratingskalen 201
10.3.2 Auswertung der freien Anmerkungen 220
10.4 Auswertung des Lehrerfragebogens 223
10.5 Vergleich Schüler-/Lehrerfragebögen 224
10.5.1 Gemeinsame Items mit Ratingskala 226
10.5.2 Beurteilung der Bausteine 229
10.5.3 Beurteilung der Schülertätigkeiten 233

11 Resumee und Ausblick 239
11.1 Resumee 239
11.2 Ausblick 246

IV Anhang 265

A Materialien aus dem Lehrerbegleitheft 267

B Zentrale Vergleichsklausur in NRW 2003 277

C Abschließender Vergleichstest 281

D Fragebögen 285

E Transkripte **295**

E.1 Transkript zur Video-Sequenz „Legespiel“ 295

E.2 Materialien zur Video-Sequenz „Wendepunkt“ 305

F Analyse-Tabellen **331**

Kapitel 1

Vorwort

„Den Unterricht öffnen? Rechner einsetzen? Schön und gut, aber dafür bleibt im Unterricht keine Zeit!“

So oder so ähnlich drücken viele Lehrerinnen und Lehrer ihre Befürchtung aus, dass mit neuen Unterrichtsmethoden, die dem Schüler und der Schülerin mehr Raum zur Eigenaktivität lassen, sowie der Integration von Rechnern curriculare Vorgaben noch schwerer zu erreichen sind als ohne diese Innovationen. Verändern der Unterrichtsmethode und Rechnereinsatz werden als zeitliche Additiva empfunden, die zusätzlich belasten. Dagegen steht die konkrete Erfahrung von Lehrpersonen, die offenen Unterricht mit integriertem Rechnereinsatz praktizieren und dies nicht als Hürde, sondern als besondere Chance erleben. Es ist die Chance, inhaltliche und prozessuale Ziele gleichermaßen und gemeinsam in den Blick zu nehmen. Bestätigt werden diese individuellen Erfahrungen durch zahlreiche Studien und Schulversuche, die eine Fülle von Lernvorteilen durch den Rechnereinsatz sehen.

Doch wie lassen sich diese konträren Sichtweisen zusammenbringen? Wie lassen sich Lehrpersonen davon überzeugen, neue Wege im Unterricht auszuprobieren? In einer Umfrage im Rahmen des Lehrerfortbildungsprojektes T^3 (Teachers Teaching with Technology) wünschten sich Lehrpersonen Materialien, die neue Wege für klassische Themen konkretisieren. Diesem Wunsch entsprechend wurde Unterrichtsmaterial entwickelt, das exemplarisch für eine veränderte Unterrichtskultur mit integriertem Einsatz von Computeralgebrasystemen (CAS) stehen kann. Damit sollte aufgezeigt werden, dass das Öffnen des Unterrichts und der Einsatz von Computeralgebra nicht eine neue zusätzliche Belastung darstellen, sondern dass die Trias „Inhalt, Medium und Unterrichtsmethode“ als Einheit zu begreifen ist, um mathematische Inhalte und Tätigkeiten gleichermaßen im Unterricht erlebbar zu machen. Es sollte aufgezeigt werden, dass die Balance zwischen dem Vermitteln unverzichtbarer Inhalte einerseits und dem Wunsch nach einem maximalen Raum andererseits, in dem Schülerinnen und Schüler ihre eigenen Lernprozesse konstruieren können, möglich und sogar wünschenswert ist.

So entstand in Zusammenarbeit mit Ines Fröhlich und Sibylle Stachniss-Carp eine Lernwerkstatt zur Untersuchung ganzrationaler Funktionen (11. Jg) ([Barzel/Fröhlich/Stachniss-Carp 2003]), bei der sich Schülerinnen und Schüler über mehrere Wochen selbstständig in die Thematik einarbeiten.

Diese Thematik bot sich aus verschiedenen Gründen an, um daran exemplarisch einen neuen Weg im Unterricht zu verdeutlichen:

- Viele veröffentlichte Unterrichtsbeispiele zum Einsatz von Computeralgebra beziehen sich auf Themen, die eher am Rand oder sogar außerhalb der curricularen Vorgaben liegen. Dagegen fordern Lehrpersonen Unterrichtsbeispiele zum Einsatz von Computeralgebra aus dem alltäglichen Pflichtkanon – dazu gehört die „Funktionsuntersuchung“ im Rahmen der Infinitesimalrechnung in der Oberstufe.

- Mit dem Einsatz von Computeralgebra sind vielfach Ängste bei den Lehrpersonen verbunden, dass alles Gewohnte und Traditionelle aufgegeben werden müsse. Dies gilt zum Beispiel für das Thema „Funktionen“. Viele Aktivitäten, die in diesem Themenkontext bisher zum schulischen Kanon gehören, können vom Rechner übernommen werden. Dazu gehört das Zeichnen von Graphen, das Lösen von Gleichungen wie auch Ableiten und Integrieren. Hier gilt es, Wege aufzuzeigen, wie trotz und gerade mit Computeralgebra die Idee und Bedeutung der gesamten Thematik erarbeitet werden können. Deshalb eignet sich das Thema „Funktionsuntersuchung“ gut, um das Potenzial und die Grenzen des Computeralgebraeinsatzes exemplarisch aufzuzeigen und auf diese Weise Ängste zu nehmen.

- Die sogenannte Kurvendiskussion ist der traditionelle Weg, das Thema „Funktionsuntersuchung“ im Unterricht zu behandeln. Dabei ist die Kurvendiskussion nicht nur bei Didaktikern in Verruf geraten (vgl. z.B.: [Borneleit/Danckwerts/Henn/Weigand 2001], [Danckwerts/Vogel 1992], [Bürger/Malle 2000]), sondern löst auch bei Lehrpersonen immer größere Unzufriedenheit aus. Denn viele Schülerinnen und Schüler wenden vorgegebene Prozeduren lediglich rezeptartig an ohne Verstehen der Inhalte. Hier alternative Zugänge aufzuzeigen, ist für die Praxis sehr wichtig.

Das Ziel dieser Lernwerkstatt ist es, einen vorstrukturierten Weg zu gehen. Das sollte die Möglichkeit schaffen, den Unterricht zu öffnen bei gleichzeitiger klarer Orientierung an den fachlichen Zielen, um eine mögliche Balance im Spannungsfeld zwischen Konstruktion und Instruktion zu realisieren.

Ausgangspunkt war eine konkrete Vorlage des Marie-Curie-Gymnasiums Ludwigsfelde. Von dieser ursprünglichen Lernwerkstatt stammen organisatorische Details sowie die äußere Grobstruktur. Hier war nach einer schulinternen Fortbildung zum Thema „Lernwerkstatt“, die ein Schweizer Kollege durchgeführt hatte, Material entstanden, das im äußeren Aufbau bereits sehr ähnlich der nun vorliegenden Lernwerkstatt war. Grundgedanke dieser ursprünglichen Version war bereits, die Methode „Lernwerkstatt“ als Weg zu nutzen, auf dem Schülerinnen und Schüler sich selbstständig die Grundbegriffe der Funktionsuntersuchung erarbeiten. Das Material war jedoch geprägt von sehr stringenten und engen Fragestellungen, die den Schülerinnen und Schülern wenig Spielraum zur freien Auseinandersetzung mit der Thematik gab und oft nur Raum für eine einzige Antwortmöglichkeit bot. Außerdem war der Einsatz von Funktionenplottern oder Computeralgebra nicht vorgesehen. So waren die beiden folgenden Fragestellungen bei der Überarbeitung des Materials leitend:

- Wie kann der Rechner sinnvoll eingesetzt werden und die thematische Erarbeitung bereichern?

- Wie lassen sich die Aufgaben und das Gesamtarrangement öffnen, damit vielfältige Schüleraktivitäten angeregt werden?

Ist dieser Weg wirklich so effizient, wie er in den Augen der Autorinnen aufgrund der eigenen Unterrichts- und Fortbildungserfahrungen erscheint? Welche Schüleraktivitäten werden tatsächlich angeregt? Lässt sich ein solcher Weg alleine durch die Vorgabe des Materials auch von anderen Lehrpersonen realisieren? Diese offenen Fragen führten zu dem Wunsch, dieses Material einer kritischen Überprüfung nach wissenschaftlichen Maßstäben zu unterziehen. So entstand das Forschungsprojekt MUKI (Mathematikunterricht zwischen Konstruktion und Instruktion), bei dem das Unterrichtsmaterial zunächst theoretisch reflektiert, weiterentwickelt und im Anschluss empirisch untersucht wurde. Der theoretische Hintergrund, der zu Konzeption und Weiterentwicklung des Unterichtsmaterials führte, wie auch die Studie zur Evaluation des Materials lassen sich leichter erfassen, wenn man eine Vorstellung von der untersuchten Lernwerkstatt gewonnen hat. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit zunächst die konkrete Lernwerkstatt anhand des

Unterrichtsmaterials präsentiert (Teil I, Kapitel 2 – 4), bevor der theoretische Hintergrund von verschiedenen Gesichtspunkten aus beleuchtet (Teil II, Kapitel 5 – 7) und im dritten Teil die Studie zur Evaluation beschrieben wird (Kapitel 8 – 10).

An dieser Stelle möchte ich all jenen danken, die mich bei dieser Arbeit unterstützt haben. Insbesondere danke ich den Kolleginnen und Kollegen des Marie-Curie-Gymnasiums Ludwigsfelde für das Bereitstellen der Vorlage der Lernwerkstatt.

Teil I

„Das ABC der ganzrationalen Funktionen“ – Das Unterrichtsmaterial

Die Lernwerkstatt „Das ABC der ganzrationalen Funktionen“ besteht aus einzelnen Stationen oder Bausteinen, die jeweils einen Aspekt von Funktionsuntersuchung repräsentieren und die von Schülergruppen von 4 – 5 Schülerinnen und Schüler in 4-6 Wochen sowohl im Rahmen der Unterrichtsstunde wie auch der Hausaufgaben zu bearbeiten sind. Diese Bausteine sind mit Buchstaben bezeichnet – nicht um damit eine sequentielle Bearbeitungsfolge zu symbolisieren, sondern der Name „ABC“ steht hier vielmehr als Symbol für Grundbausteine, mit denen man Neues und Kreatives bauen und entstehen lassen kann. In diesem Sinne werden die Stationen auch als „Bausteine“ bezeichnet. Die Arbeitsaufträge zu den einzelnen Bausteinen sind in einem Schülerheft zusammengefasst ([Barzel/Fröhlich/Stachniss-Carp 2003]), das jede Schülerin und jeder Schüler zu Beginn erhält. Daneben gehört zum Unterrichtsmaterial noch ein Lehrerheft. Darin sind in knapper Form didaktische und methodische Anmerkungen zur Unterrichtsform sowie Zusatzmaterialien zu finden. Im Einzelnen enthält dieses Lehrerheft die folgenden Elementen:

- Allgemeine Hinweise zum Gesamtaufbau der Lernwerkstatt (vgl. Kapitel 2)
- Spezielle Hinweise und Zusatzmaterialien zu den einzelnen Bausteinen: (vgl. Kapitel 4)
- Aspekte zur Bewertung der Arbeit (Kopiervorlage für Schülerinnen und Schüler, gvl. Anhang A – Seite 268),
- Aspekte zur Dokumentation (Kopiervorlage für Schülerinnen und Schüler, vgl. Anhang Anhang A – Seite 271)
- Organisationshilfen (z.B. Tabelle zum Aushängen im Klassenraum, in der die einzelnen Gruppen ihren Arbeitsstand eintragen können); technische Hinweise (vgl. Anhang A – 270)
- Lernkontrolle und Klausurvorschlag (mit Lösungen) (vgl. Anhang A – 273),

Im Folgenden wird das Schüler- und Lehrermaterial vorgestellt und zwar in den Originalformulierungen, wie sie den an der Untersuchung beteiligten Schülergruppen und Lehrpersonen vorgelegen haben. Es beginnt mit den allgemeinen Hinweisen zur Lernwerkstatt aus dem Lehrerheft (Kapitel 2), gefolgt von den Bausteinen aus dem Schülerheft (Kapitel 3) und endet mit den Hinweisen zu den einzelnen Bausteinen für Lehrpersonen (Kapitel 6.5).

Einzelne Seiten des Zusatzmaterials aus dem Lehrerheft wurden unmittelbar bei den Aufgabenstellungen der entsprechenden Bausteinen in Kapitel 3 aufgenommen (wie z.B. die Spielpläne). Das weitere Zusatzmaterial befindet sich im Anhang, worauf im Text entsprechend hingewiesen wird.

Kapitel 2

Allgemeine Hinweise für Lehrpersonen

Inhalte

Die vorliegende Lernwerkstatt enthält Materialien, mit denen sich Schülerinnen und Schüler des 11. Jahrgangs selbstständig die Elemente der „klassischen“ Kurvendiskussion, Funktionsuntersuchungen und -bestimmungen erarbeiten können. Die Sequenz besteht aus mehreren Bausteinen oder Stationen, die mit Buchstaben bezeichnet sind – das ABC der ganzrationalen Funktionen. Bei zwei Bausteinen werden auch andere Funktionen verwendet. Sie setzen aber keine allgemeine Einführung nichtganzrationaler Funktionen voraus und sind durch einen entsprechenden Hinweis in den Schülermaterialien gekennzeichnet.

Voraussetzung

Die Schülerinnen und Schüler sollen den Begriff der „Ableitung“ und die Bedeutung der Ableitung als lokale Änderungsrate (z.B.: als Tangentensteigung) kennen.

Ziele

Fachkompetenz Die Schülerinnen und Schüler erarbeiten sich über einen Zeitraum von ca. sechs Wochen die Thematik selbstständig mit den vorgegebenen Schülermaterialien. Dabei werden sie die besonderen Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen kennen lernen. Im Einzelnen werden sie:

- besondere Punkte der Graphen mit den jeweiligen Bedingungen (Schnittpunkt mit den Achsen, Extrempunkte, Wendepunkte) kennen lernen und bestimmen,
- den Verlauf des Graphen vorhersagen, beschreiben und interpretieren – lokal und global,
- die unterschiedlichen Darstellungsarten von Funktionen in ihrer Funktionalität kennen lernen (Term , Graph, Tabelle, Situation).

Sozialkompetenz/Methodenkompetenz Neben dem Erarbeiten der Inhalte ist es vor allem das Ziel, die Eigenverantwortung und Motivation für den eigenen Lernprozess zu stärken.

Medienkompetenz Die Schülerinnen und Schüler werden dazu angeregt, selbstständig zu entscheiden, welches Medium sie wann und wozu zum Bearbeiten der einzelnen Probleme wählen. Zu „Medien“ zählen neben den elektronischen Medien auch das Schulbuch und weitere Nachschlagewerke.

Einstieg

Es empfiehlt sich, die Lernwerkstatt mit einer gemeinsamen Aufgabe im Klassen- oder Kursverband zu beginnen, die die Notwendigkeit der Untersuchung von Funktionen deutlich macht und anregt. Damit kann gleichzeitig ein gemeinsames inhaltliches Ausgangsniveau geschaffen werden. Es bietet sich zum Beispiel die folgende Aufgabe an:

> Ertragsoptimierung
>
> Die Kosten K(x) – in 100 € – einer Ziegelei bei einer täglichen Produktion von x Einheiten à 10 000 Ziegel können durch die Funktion K(x) erfasst werden:
>
> $$K(x) = 0{,}25x^3 - 3x^2 + 12x + 17$$
>
> Untersuchen Sie die Ertragslage der Firma, wenn die Ziegel für 0,80 € pro Stück verkauft werden können. Diskutieren Sie das Problem aus der Sicht des Unternehmers.

Es ist ratsam, diese Aufgabe in Kleingruppen zu erörtern, bevor im Plenum die Lösungsansätze vorgestellt werden. Eine Darbietung oder fragendes Entwickeln von fertigen Lösungswegen ist dabei der Motivation für die eigenständige Untersuchung hinderlich. Nach der Arbeit an der Werkstatt kann dieses Problem wieder aufgegriffen werden und Lösungsmöglichkeiten mit den neu erworbenen Kenntnissen neu diskutiert werden.

Zum Rechnereinsatz

Die Lernwerkstatt ist zum integrierten Einsatz von Rechnern gedacht (besonders Funktionenplotter, grafikfähige Taschenrechner oder ein Computeralgebrasystem). Nur bei wenigen Aufgaben ist der Rechnereinsatz zwingend erforderlich. Er hilft jedoch bei fast allen Bausteinen als Werkzeug um Beispiele zu generieren und Vermutungen zu überprüfen. Deshalb ist es hilfreich, wenn der Rechner allen Schülerinnen und Schülern möglichst immer zur Verfügung steht (wie bei einem grafikfähigen Taschenrechner, einem Klassensatz Laptops, Taschencomputer oder bei ständiger Arbeit im Computerraum). Aber auch mit einzelnen Computern wie zum Beispiel in einer Medienecke, im Computerraum oder im Selbstlernzentrum der Schule ist das Projekt durchführbar. In diesem Fall sind dann zeitliche Absprachen zur Nutzung des Computers zwischen den einzelnen Gruppen sinnvoll.

Folgende Rechner-Kenntnisse sollten die Schülerinnen und Schüler beherrschen:

- Funktionsgraphen zeichnen lassen,
- Grafik-Fenster sinnvoll einstellen, Zoom-Funktion,
- Umgang mit Wertetabellen, z.B. Tabellen „verfeinern“

.. und zusätzlich bei Rechnern mit Computeralgebrasystem:

- Ableitungen bestimmen,
- Gleichungen und Gleichungssysteme lösen.

Für den Einsatz von grafikfähigen Taschenrechnern bzw. -computern (z.B.: V-200/ TI-89/ Ti-92+) finden sich Hinweisblätter (Anhang A), die je nach Vorkenntnissen der Schülerinnen und Schüler für alle kopiert oder mehrfach ausgelegt werden können.

Zur Organisation des Unterrichts während der Lernwerkstatt

Zu empfehlen ist:

- Die Schülerinnen und Schüler sollten **in Gruppen** zu 3-5 Schülern zusammenarbeiten, wobei mindestens eine leistungsstarke Schülerin bzw. ein leistungsstarker Schüler pro Gruppe hilfreich ist.

- Die Erfahrung hat gezeigt, dass es sinnvoll ist, **sechs Wochen** (à 3 Unterrichtsstunden) für die Lernwerkstatt einzuplanen. Um die Zeit gegebenenfalls zu verkürzen, kann Baustein F als Teil der Lernwerkstatt entfallen und als eigene Thematik im Abschluss bearbeitet werden.

- Jede Schülerin/jeder Schüler erhält ein Heft der **Schülermaterialien**.

- Es gibt **keine speziellen Hausaufgaben**, die Schülerinnen und Schüler sind gehalten, auch zu Hause an den Materialien zu arbeiten und entsprechende Absprachen in der Gruppe zu treffen.

- Eine Tabelle, die im Klassenraum aushängt und in der Schülergruppen eintragen, welche Bausteine sie bereits erarbeitet haben, gibt allen einen **Überblick über den gesamten Arbeitsfortschritt** und die Zeitplanung.

- Die Schülerinnen und Schüler dokumentieren ihre Arbeitsergebnisse sorgfältig. Zur **Dokumentation** gehört nicht nur das Aufschreiben von Ergebnissen, sondern insbesondere auch das Festhalten von Merkhilfen, ersten Ideen, Erklärungsversuchen, weiteren Erkenntnissen, einleuchtenden Beispielen u.a. Als Anleitung für eine solche Dokumentation kann den Schülerinnen und Schülern ein Merkblatt (Anhang A) ausgegeben werden. Es ist sehr zu empfehlen, sich jeweils mindestens ein Heft pro Gruppe anzuschauen. Auf diese Weise erhält man zusätzlich zu den Beobachtungen einen Eindruck über den Stand des Lernprozesses. Dadurch erfährt man sowohl sehr schöne Zugänge und individuelle Ideen als auch Fehlvorstellungen, auf die man dann gezielt reagieren kann.

- Zur Lernkontrolle werden ein oder zwei Kopien der **Lösungen** im Klassenraum ausgelegt.

- Ebenso ist es wichtig, **Begleitmaterial** (z.B. verschiedene Schulbücher oder Mathematikduden) bereit zu stellen.

- Um die Erkenntnisse und Ergebnisse zu vergleichen und evtl. zu korrigieren, erfolgt nach der 1. Stufe eine **Präsentation** der Bausteine K,L,E,N,S im Plenum. Es hat sich bewährt, wenn jede Gruppe einen (evtl. zwei) Baustein/e vorstellt, und die Zuordnung, welche Gruppe welchen Baustein präsentiert, erst eine Unterrichtsstunde vor der Präsentation per Los entschieden wird. So wird eine zu frühe Fixierung auf wenige Bausteine vermieden. Von Vorteil ist es, wenn alle Gruppen „ihr“ Thema anhand derselben Funktion vorstellen (z.B.

$f(x) = -6x^4 + 8x^3$). Zur Visualisierung der Präsentationen können die einzelnen Gruppen Plakate mit den jeweils wichtigsten Aspekten erstellen. Diese Plakate können im Raum aufgehängt werden. Im Anschluss an eine individuelle Betrachtung können noch einmal gemeinsam zu allen Plakaten bzw. Bausteinen Fragen geklärt oder Begrifflichkeiten vereinheitlicht werden.

- Im **Anschluss an die Lernwerkstatt** können im Sinne einer Anwendung und Vertiefung der erarbeiteten Bausteine zum Beispiel Optimierungsaufgaben und die Behandlung von Kurvenscharen stehen.

Kapitel 3

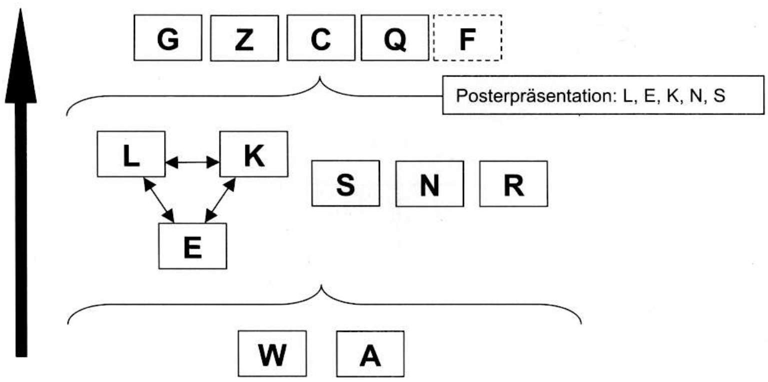
Das Schülerheft

Das ABC der ganzrationalen Funktionen

Liebe Schülerinnen und Schüler,

die Analyse von Funktionen ist eine Tätigkeit, ohne die in vielen Bereichen des gesellschaftlichen Lebens (z.B. Wirtschaft, Technik, Versicherungen) nicht professionell gearbeitet werden kann. So ist es beim Planen von Optimierungsprozessen oder beim Erstellen von Prognosen wichtig, über die mathematischen Eigenschaften von Funktionen Bescheid zu wissen und Graphen angemessen interpretieren zu können. Die Untersuchung auf solche Eigenschaften und ihre Bedeutung werden Sie in der vorliegenden Lernwerkstatt anhand einer wichtigen Funktionenklasse – den ganzrationalen Funktionen – kennen lernen.
Ganzrationale Funktionen sind alle Funktionen, deren Terme aus Vielfachen von Potenzen von x und deren Summe zusammengesetzt sind (z.B. $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + x - 1$).

Die Werkstatt besteht aus mehreren Stationen, die mit Großbuchstaben bezeichnet sind – das ABC der ganzrationalen Funktionen. Inhaltliche Voraussetzung für die Lernwerkstatt ist, dass Sie mit dem Begriff der Ableitung vertraut sind. Die Bausteine W und A helfen Ihnen, den Ableitungsbegriff zu vertiefen, weshalb Sie mit diesen Bausteinen beginnen sollten.
Es gibt mehrere Wege durch die Stationen, jedoch braucht man für einige Stationen die Kenntnisse aus anderen. Die folgende Grafik verdeutlicht die möglichen Wege, wobei man von unten, von der „Basis“, ausgeht und sich dann nach oben arbeitet. Um die Ergebnisse und Erkenntnisse zu vergleichen und einen gemeinsamen Kenntnisstand zu schaffen, werden nach der zweiten Stufe die wichtigsten Bausteine (L, E, K, N, S) im Plenum präsentiert und besprochen.



Wir wünschen viel Erfolg!
Bärbel Barzel, Ines Fröhlich, Sibylle Stachniss-Carp

[1]

[1] Im Folgenden finden Sie die einzelnen Seiten des Schülermaterials im Original-Layout.

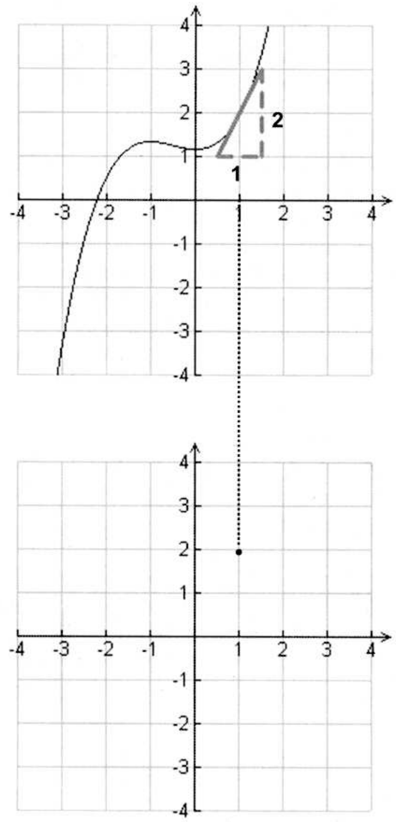
W Werkzeuge

Vorausgesetzte Bausteine: Keine

Sie erarbeiten die Grund – Werkzeuge **Ableitung** und **Ableitungsregeln**.

Grafisch:

Lesen Sie für mehrere Stellen im Graphen von f die ungefähre Tangentensteigung ab. Übertragen Sie die Werte in das untere Koordinatensystem. Für die Stelle x = 1 wurde dies bereits durchgeführt.



Rechnerisch:

Ermitteln Sie mithilfe des Rechners den Term der Ableitungsfunktion zu einigen Funktionen und stellen Sie diese in einer Tabelle zusammen.

f(x)	f'(x)

Schließen Sie aufgrund Ihrer Beispiele auf allgemeine Ableitungsregeln für ganzrationale Funktionen und überprüfen Sie diese an weiteren Beispielen.

A Ich gehe den Ableitungsgraphen

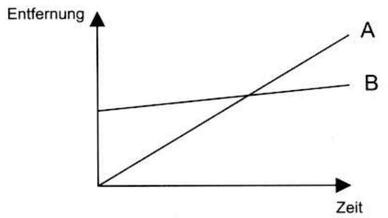
Vorausgesetzte Bausteine: Keine

Sie erfahren den Zusammenhang zwischen Entfernung und Geschwindigkeit als eine **Anwendung** von Ableitung.

Hier geht es nicht nur um ganzrationale Funktionen.

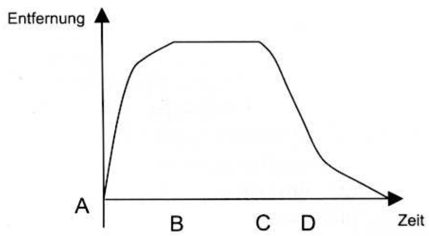
1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Markieren Sie mit **W** oder **F**.

Situation a): Zwei Läufer (A und B) laufen auf einem gemeinsamen Weg. Die Graphen geben ihre Entfernungen vom Startpunkt aus in Abhängigkeit von der Zeit an.



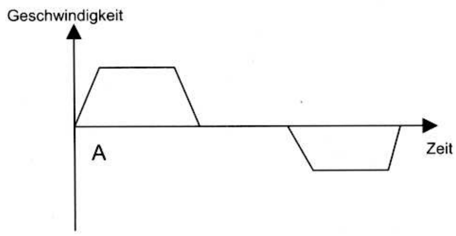
(1) Anfangs läuft B schneller als A.
(2) Der Schnittpunkt der Graphen bestimmt den Zeitpunkt, an dem A und B dieselbe Geschwindigkeit haben.
(3) A läuft immer schneller als B.

Situation b): Der Graph zeigt, wie sich die Entfernung eines Zuges vom Startpunkt A verändert.



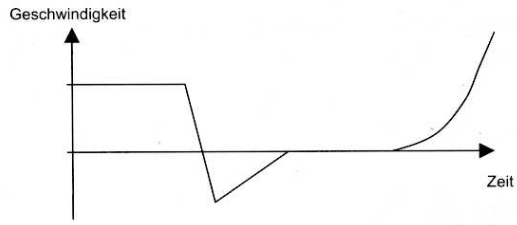
(1) Der Zug wird kurz vor B langsamer.
(2) Der Zug wird kurz vor B schneller.
(3) Der Zug bewegt sich zwischen B und C mit konstanter Geschwindigkeit.
(4) Der Zug steht zwischen B und C still.
(5) Der Zug kehrt zum Ausgangspunkt zurück.
(6) Der Zug wird zwischen C und D langsamer.

Situation c): Der folgende Graph zeigt, mit welcher Geschwindigkeit sich eine Person auf einer Geraden zwischen A und B bewegt. Sie startet bei A.



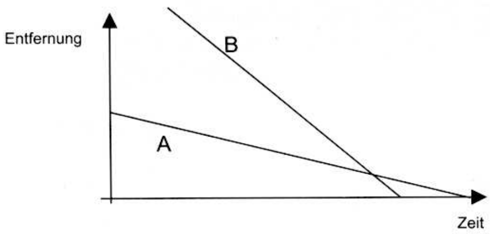
(1) Die Person ist jederzeit in Bewegung.
(2) Die Person bewegt sich bis A erst langsam und wird dann immer schneller.
(3) In den waagerechten Teilstücken des Graphen stoppt die Person.

2. Beschreiben Sie den Bewegungsablauf, der im Graphen rechts aufgezeichnet ist.
   Falls ein Bewegungsmessgerät zur Verfügung steht:
   Vollziehen Sie die Bewegung nach und erzeugen Sie so selbst diesen Graphen.



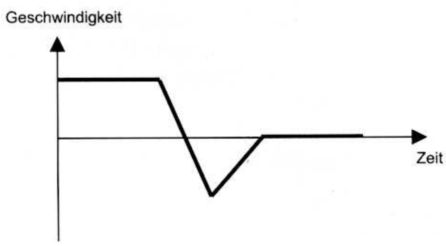
3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

   Situation a): Der Graph beschreibt die Endphase eines Wettlaufs bis zum Ziel.



   (1) Nur am Anfang ist B schneller als A.
   (2) Der Schnittpunkt der Graphen beschreibt den Zeitpunkt, bei dem A und B dieselbe Geschwindigkeit haben.
   (3) A läuft immer schneller als B.
   (4) B gewinnt den Wettlauf.

   Situation b): Ein Radfahrer fährt auf einer Wegstrecke AB. Er beginnt genau in der Mitte M zwischen A und B und fährt zuerst in die Richtung von B. Der folgende Graph gibt die Bewegung wieder.



   (1) Der Radfahrer fährt stets in die gleiche Richtung.
   (2) Er beginnt seine Fahrt mit wachsender Geschwindigkeit.
   (3) Am Schluss ruht er sich aus.
   (4) Seine Endposition ist zwischen A und M.
   (5) Seine Endposition ist zwischen M und B.

L Lange Leitungen

Vorausgesetzte Bausteine:
Keine, aber Vernetzung mit K und E

Sie erarbeiten die **Ableitung der Ableitung**, die **Ableitung der Ableitung der Ableitung** ....

Wie oft muss man ableiten, bis sich zum ersten Mal der Ableitungsterm Null ergibt?

Bestimmen Sie alle Ableitungen.
$f(x) = x^2 - 6x + 8$
$g(x) = -2x^3 + 6x^2$
$h(x) = x^5 - 4x^3 + 4x - 7$

Information

Differenziert man die Ableitungsfunktion f', so erhält man eine neue Funktion (f')' = f'', die Ableitung der Ableitung, genannt „die 2. Ableitung“.

Auf gleichem Weg gelangt man von f' zu f''' = $f^{(3)}$, der 3. Ableitung, von f'' zu f'''' = $f^{(4)}$, der 4. Ableitung, usw.

Beispiel:
$f(x) = 0{,}125\,(x^3 - 9x^2 + 15x + 25)$
$f'(x) = 0{,}125\,(3x^2 - 18x + 15)$
$f''(x) = 0{,}125\,(6x - 18)$
$f'''(x) = 0{,}125 * 6$
$f^{(4)}(x) = 0$ ...
$f^{(n)}(x) = 0$ für $n \geq 4$

Man liest: „f zwei Strich“ für f'', „f drei Strich“ für f''', „f n Strich“ für $f^{(n)}$

Informieren Sie sich darüber, was man unter einem Wendepunkt versteht.

Stellen Sie folgende Funktionen und alle ihre Ableitungsfunktionen grafisch dar. Benutzen Sie für jede Funktion ein neues Koordinatensystem.
$f(x) = 0{,}125\,(x^3 - 9x^2 + 15x + 25)$
$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
$h(x) = 0{,}2x^4 - 0{,}3x^3 - x^2 + 0{,}2$
Finden Sie jeweils möglichst viele Zusammenhänge zwischen dem Graphen der Funktion und deren Ableitungen. Ziehen Sie allgemeine Schlüsse und vervollständigen Sie die Tabelle.

Grad[1] der Funktion	Max. Anzahl Nullstellen	Max. Anzahl Extrempunkte	Max. Anzahl Wendepunkte

[1] Die höchste vorkommende x-Potenz im Funktionsterm ist der „Grad“ einer Funktion. Zum Beispiel hat eine quadratische Funktion den Grad 2; die Funktion $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 1$ ist eine Funktion 4. Grades usw.

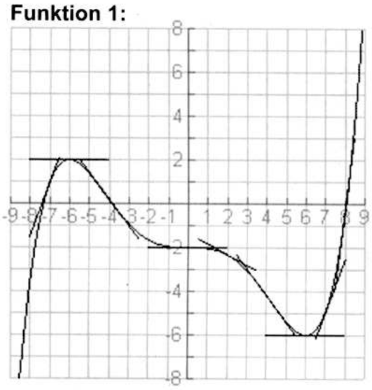
E Extremes

Vorausgesetzte Bausteine:
Keine, aber Vernetzung mit K und L

Sie lernen **lokale Extremstellen** zu bestimmen.

Häufig ist es wichtig zu wissen (z.B. bei Kostenfunktionen), wo in einem bestimmten Bereich Funktionswerte minimal oder maximal werden. Die verschiedenen Darstellungsarten einer Funktion (Term, Graph oder Tabelle) haben bei der Bestimmung dieser lokalen Extremstellen Vor- und Nachteile. Im Folgenden sind drei Funktionen jeweils unterschiedlich gegeben – bestimmen Sie für diese Funktionen diejenigen x-Werte, an denen die Funktionen einen lokalen Extremwert annehmen (d.h. minimal bzw. maximal werden). Halten Sie Vor- und Nachteile der drei Darstellungsarten fest.

Funktion 1:



Funktion 3:
$f(x) = x^2 + 2$ mit $-2 \leq x \leq 2$

Funktion 2:

x	y
0	13,5
1	5,9375
2	1
3	–1,6875
4	–2,5
5	–1,8125
6	0
7	2,5625
8	5,5
9	8,4375
10	11
11	12,8125
12	13,5
13	12,6875
14	10
15	5,0625

Ermitteln Sie ein rechnerisches Verfahren, lokale Extrempunkte zu bestimmen. Wenden Sie das Verfahren auf die folgenden Funktionen an. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe des jeweiligen Graphen.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

„Ist die Tangentensteigung 0, liegt ein lokales Extremum vor."

Beurteilen Sie diese Aussage und verbessern Sie gegebenenfalls.

Warum ist das Adjektiv „lokal" wichtig?

K Sanft krümmt sich ...

Vorausgesetzte Bausteine:
Keine, aber Vernetzung mit E und L

Sie erarbeiten **Links- und Rechtskurven** und wie man am Term ablesen kann, welche Art von Kurve vorliegt.

Zeichnen Sie den Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4$ in ein Koordinatensystem und in zwei weitere, darunter liegende Koordinatensysteme die Graphen der 1. und der 2. Ableitung im Intervall $-2{,}5 \leq x \leq 2{,}5$.

Erarbeiten Sie sich die Bedeutung der 2. Ableitung.

Mögliche Aspekte:

Betrachten Sie den Graphen von f als eine Straße aus der „Vogelperspektive", die in Richtung zunehmender x-Werte befahren wird. In welchem Bereich ergibt sich eine Linkskurve bzw. eine Rechtskurve? Welche Eigenschaft hat die zweite Ableitung in diesen „Kurvenbereichen"?

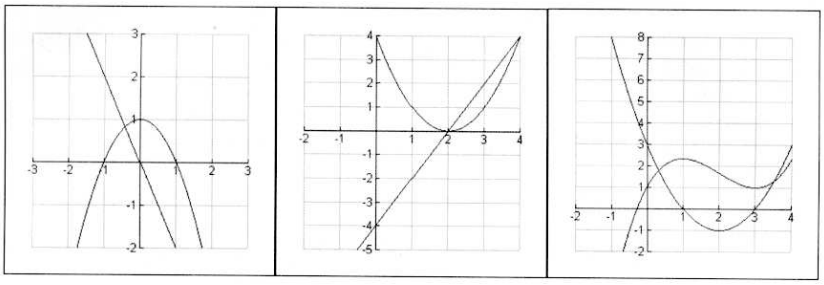
Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Ableitungen und dem Kurvenverhalten in Links- bzw. Rechtskurven?
Welche Kurvenart liegt bei einem lokalen Maximum bzw. Minimum vor?

Welche Rolle spielt der Wendepunkt in Bezug auf das Kurvenverhalten?

Als Hilfe können Sie das ausliegende Merkposter verwenden.

1. Gegeben ist $f''(x) = ax - 2$. Wie muss a gewählt werden, damit der Graph von f bei $x = 1$ die Kurvenart (d.h. von Links- zur Rechtskurve oder umgekehrt) wechselt?

2. Die Abbildungen zeigen jeweils die Graphen von f' und f''. Zeichnen Sie jeweils den Graphen einer passenden Funktion f. (Wie viele Funktionen f gibt es jeweils?)



3. Von einer ganzrationalen Funktion f ist bekannt: f'' ist für $x < 4$ negativ und für $x > 4$ positiv. Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f in der Nähe der Stelle $x = 4$.

4. f'' hat die Gleichung $f''(x) = x^2 - x - 2$.
   In welchen Bereichen macht der Graph von f eine Linkskurve bzw. eine Rechtskurve?

5. Wo können Wendepunkte der folgenden Funktionen liegen?
   $f(x) = x^3 - x^2$ $\qquad$ $g(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2$ $\qquad$ $h(x) = -5x^2 + 7x - 6$

N Die Null-Linie

Vorausgesetzte Bausteine: Keine

Sie lernen zu erkennen, an welchen Stellen eine Funktion **null** wird.

Die verschiedenen Darstellungsarten von Funktionen (Graph, Term oder Tabelle) haben auch bei der Bestimmung von Nullstellen ihre Vor- und Nachteile. Finden Sie diese heraus, indem sie an den folgenden Funktionen die Nullstellen bestimmen und die Vorgehensweisen vergleichen.

Tabelle	
x	y
–1	–2,25
0	–2
1	–1,75
2	6
3	58,75
4	254
5	779,25
6	1942

Wo liegt die Nullstelle?
Was können Sie aus der Tabelle ablesen?
Bestimmen Sie die Nullstelle genauer, indem Sie die Tabelle verfeinern.
Die Funktionsgleichung lautet:
$y(x) = 0{,}25x^5 - 2$

Graph

Betrachten Sie den Graphen der Funktion am Bildschirm und ermitteln Sie durch fortgesetztes Zoomen im Grafikfenster die Nullstellen möglichst genau.
$y(x) = 0{,}2x^3 - 1{,}4x^2 + 0{,}7x + 6{,}5$

Term

Schreiben Sie den Term als Produkt und bestimmen Sie die Nullstellen:

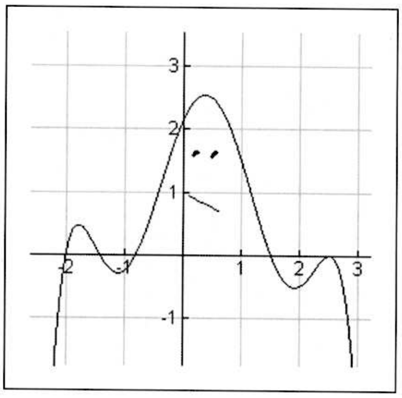
a) $f(x) = x^2 - 5x$
b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$
c) $f(x) = x^2 + x + 1$
d) $f(x) = (x - 4)(x + 1)^3 (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 1)$
e) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x$

1. Listen Sie die Vor- und Nachteile der Vorgehensweisen auf.

2. Geben Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion an, die
   a) den Grad[2] 2 und die Nullstellen 7 und 8 hat,
   b) den Grad 3 und die Nullstellen 2,5 und –3 hat.

3. Bestimmen Sie a so, dass $f(x) = x^2 - 5{,}5x + a \cdot 1{,}5$ eine Nullstelle 3 hat und berechnen Sie anschließend die weitere Nullstelle.

4. Stellen Sie den „Geist" der nebenstehenden Grafik auf Ihrem Bildschirm dar.



[2] Die höchste vorkommende x-Potenz im Funktionsterm ist der „Grad" einer Funktion. Zum Beispiel hat eine quadratische Funktion den Grad 2; die Funktion $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 1$ ist eine Funktion 4. Grades usw.

S Symmetrien

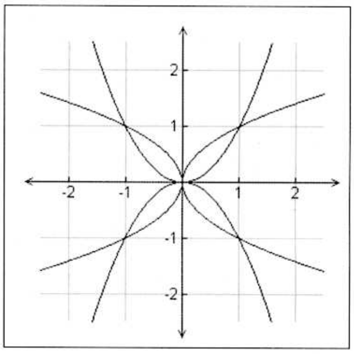
Vorausgesetzte Bausteine: Keine

Sie untersuchen Graphen auf **Symmetrie** und ermitteln, wie man Symmetrie manchmal schon am Term erkennen kann

Hier geht es nicht nur um ganzrationale Funktionen.

1. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Symmetrie des Graphen.
   Überlegen Sie sich eine sinnvolle Unterscheidung der Symmetriearten.
   Bei manchen Funktionen kann man schon am Term die Symmetrie des Graphen erkennen.
   x^2, x^3, x^4, x^5, $\sin(x)$, x^{-1}, x^{-2}, $\sqrt{x}$, 2^x, 2^{x^2}, $|(x^2-1)|$, $2x-1$, x

2. Welche Symmetrie lässt sich am Term erkennen?
   a) $f(x) = 0{,}5x^4 - x^2 + 4$
   b) $f(x) = 7x^3 - x + 1$
   c) $f(x) = 0{,}2x^7 - 3{,}1x^5 + x^3$
   d) $f(x) = x + x^2 + x^3$
   e) $f(x) = x^{13} + 5x^{11} - x^9 + 8x^6 - 6$



3. Geometrische Bilder erhält man natürlich auch mithilfe mehrerer Graphen.
   Welche Funktionen benötigt man zum Beispiel für die „Blume"?

R Reiterspiel (für 4 Spieler/innen)

Vorausgesetzte Bausteine: L, E, K, N, S

Sie vertiefen die neuen Kenntnisse anhand eines Spieles.

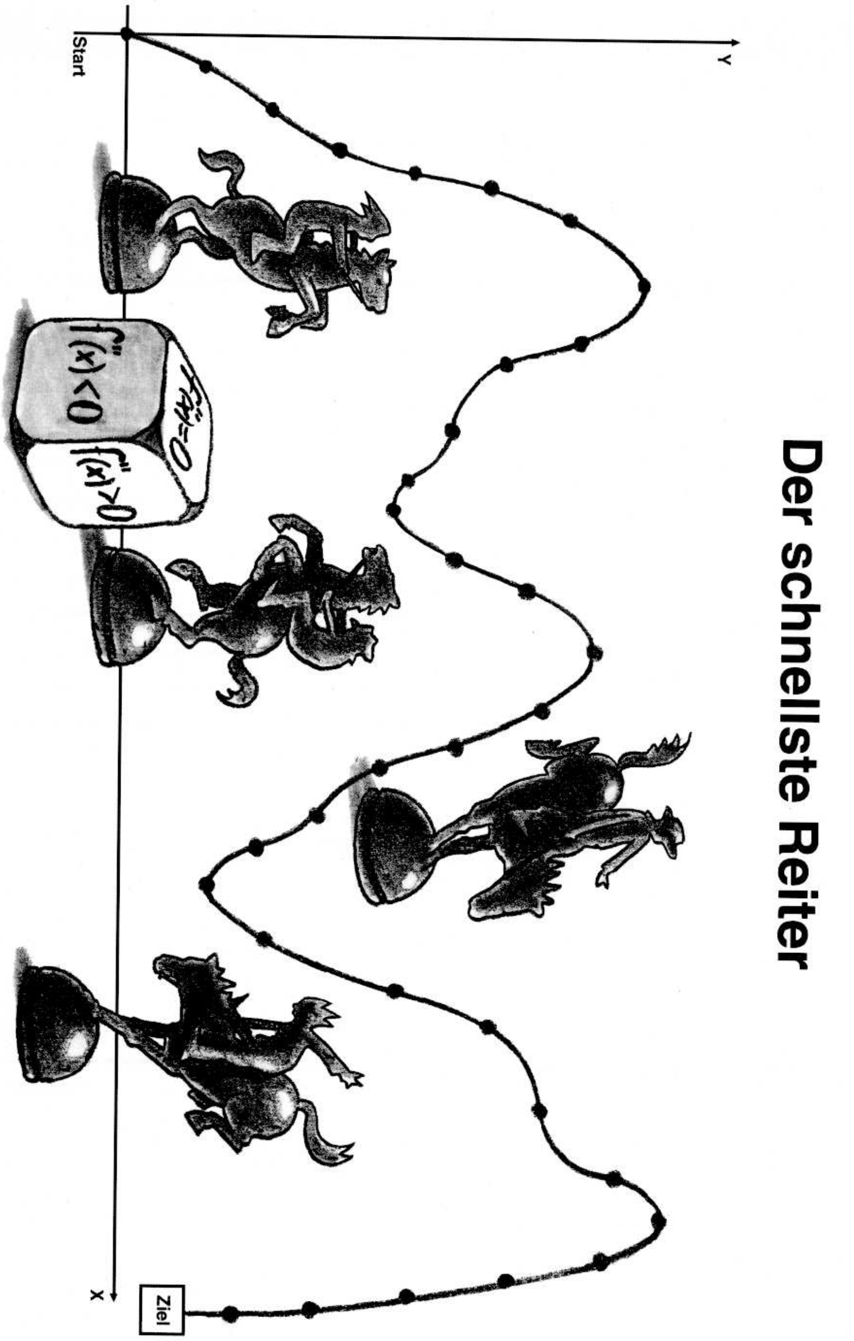
Vorbereitung:

Bekleben Sie einen Spielwürfel mit den Aufschriften $f'(x) = 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) = 0$, $f''(x) < 0$, $f''(x) > 0$.
Bringen Sie bitte selbst Spielfiguren mit, der Spielplan liegt im Unterricht aus.

Anleitung:

Jede Mitspielerin und jeder Mitspieler wählt eine Spielfigur (Pferd) und stellt diese auf das Startfeld. Man würfelt nacheinander und galoppiert zum nächsten (nicht übernächsten) Feld, bei dem der Kurvenverlauf mit der Würfelaufschrift übereinstimmt.
Steht dort bereits ein Reiter, so darf man diesen zurück auf das Startfeld setzen.
Gewonnen hat der erste Reiter, der das Ziel erreicht.

Reiterspiel **(Spielplan zu Station R)**



C Check-up

Vorausgesetzte Bausteine: L, E, K

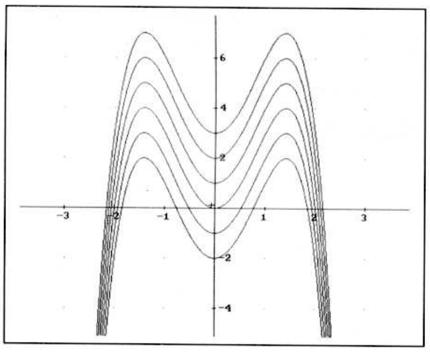
Sie überprüfen die neuen Kenntnisse.

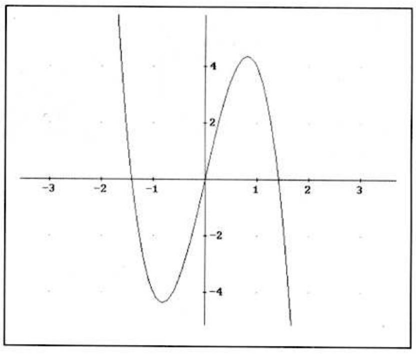
1. Wahr oder falsch?

Aussage	wahr/falsch	Begründung, ggf. Korrektur
Zwischen zwei benachbarten Extrema einer ganzrationalen Funktion liegt immer ein Wendepunkt.		
Besitzt der Graph einer ganzrationalen Funktion zwei Wendepunkte, dann muss sie mindestens 4. Grades sein.		
Wenn $f'(x_0) = 0$ gilt, dann ist x_0 eine Extremstelle.		
Wenn x_0 eine Extremstelle ist, dann hat dort die 1. Ableitung den Wert 0.		
Wenn die Steigung des Graphen von f an der Stelle x_0 null ist, dann hat f in x_0 eine Wendestelle.		
Wenn $f''(x_0) = 0$ ist, dann hat der Graph von f dort einen Wendepunkt.		
An der Stelle mit der größten Steigung liegt ein Wendepunkt.		
Aus „Steigung in (1/0) ist 2“ kann ich als einzige Bedingung schließen, dass $f'(1) = 2$ ist.		

2. a) Bestimmen Sie Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f mit $f(x) = x^3 - x$.
   b) Der Graph der Funktion $g(x) = x^4 - ax^3$ hat bei $x = -3$ eine Extremstelle. Bestimmen Sie a.
   c) Der Graph der Funktion $h(x) = x^3 - 5x^2 + ax$ hat bei $x = 2$ eine Extremstelle. Bestimmen Sie a.

3. Wie hängen diese Bilder zusammen?





G Geheimnis lüften

Vorausgesetzte Bausteine: L, E, N, K, S

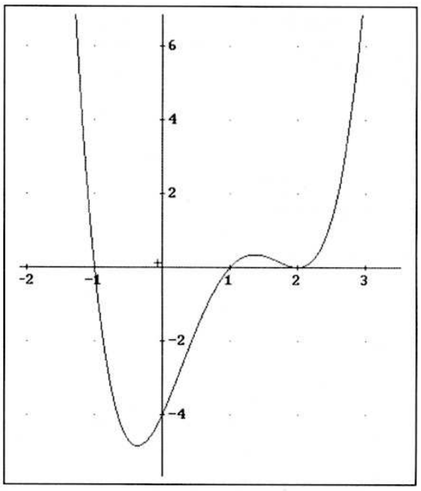
Sie bestimmen Funktionen und Eigenschaften aufgrund gegebener Informationen.

1. Von einer Funktion ist der nebenstehende **Term** gegeben: $f(x) = \frac{2}{3}(x-2)(x^2 + \frac{1}{2}x - 5)$

   Untersuchen Sie die Funktion mithilfe der Bausteine auf möglichst viele Eigenschaften.

2. Von einer Funktion ist der nebenstehende **Graph** gegeben.

   Untersuchen Sie die Funktion mithilfe der Bausteine auf möglichst viele Eigenschaften.



Wertetabelle

x	f(x)
–4	192
–3,5	101,06
–3	45
–2,5	14,06
–2	0
–1,5	–3,94
–1	–3
–0,5	–0,94
0	0
0,5	–0,94
1	–3
1,5	–3,94
2	0
2,5	14,06
3	45
3,5	101,06
4	192

3. Von einer Funktion ist die nebenstehende **Tabelle** gegeben. Untersuchen Sie die Funktion mithilfe der Bausteine auf möglichst viele Eigenschaften.

4. Nennen Sie auch hier die Vor- und Nachteile der drei Darstellungsarten beim Bestimmen von Funktionen.

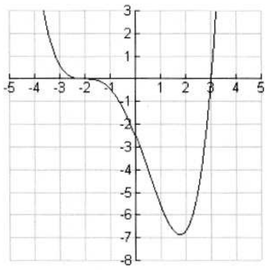
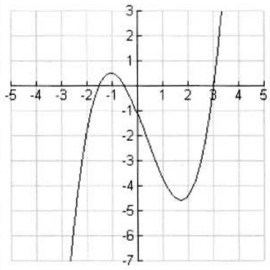
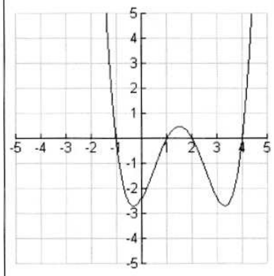
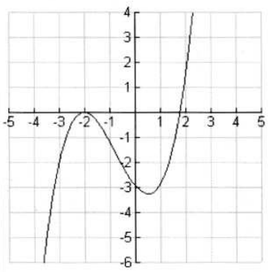
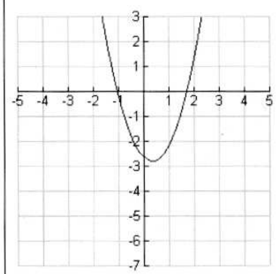
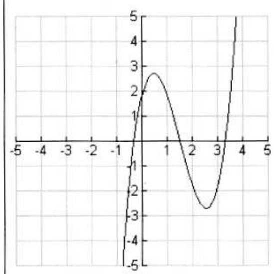
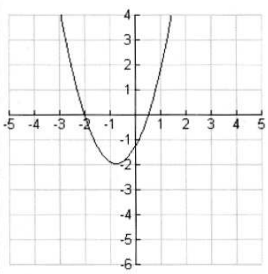
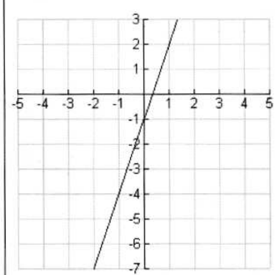
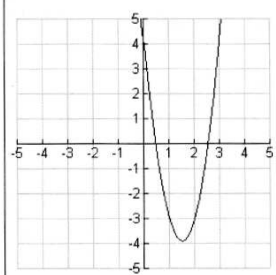
Z Spiel – Was gehört zusammen?

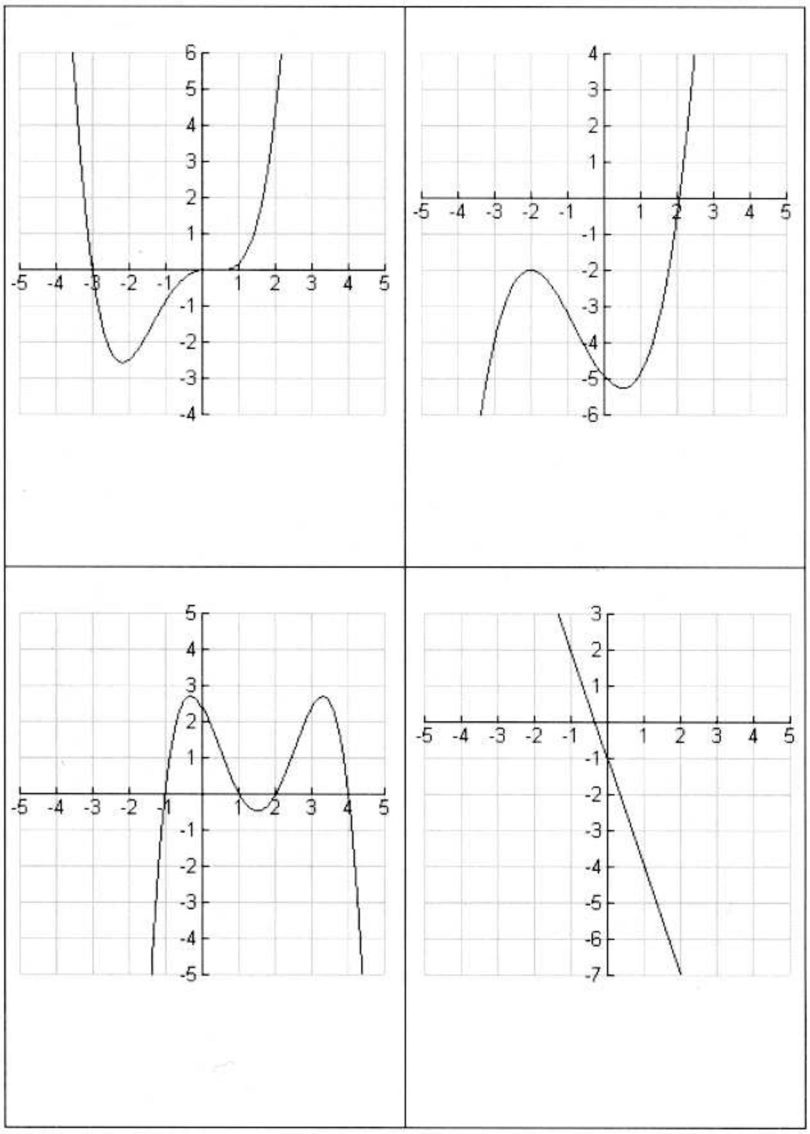
Vorausgesetzte Bausteine: L

Sie üben Graphen von Funktionen und die zugehörigen Ableitungsfunktionen zu finden.

Aus 14 vorgegebenen Funktionsgraphen sind drei Funktionsgraphen und die Graphen ihrer 1. und 2. Ableitung herauszufinden und einander zuzuordnen. Legen Sie dafür die passenden Kärtchen in die vorbereitete Tabelle.

Das hierfür notwendige Material (eine Tabelle und 13 Kärtchen mit (Funktions-) Graphen) liegt aus. Ordnen Sie jeweils passende Kärtchen in der Tabelle ein.

	1	2	3
f			
f'			
f''			



Q Quiz

Vorausgesetzte Bausteine: alle anderen

Sie tragen die neuen Kenntnisse in einem Quiz zusammen.

Wie viele lokale Extrema hat eine ganzrationale Funktion 4. Grades?

a) genau 3	b) höchstens 3
c) mindestens 3	d) keine Aussage möglich

Überlegen Sie sich nach diesem Muster drei weitere Fragen mit Antwortmöglichkeiten. Nutzen Sie dazu die in der Lernwerkstatt erarbeiteten Inhalte und gehen Sie auf Aspekte ein, die für Sie wichtig sind – das sind z.B.:

- Stellen, an denen Sie „Gedankenblitze“ hatten,
- Inhaltliches, das Ihnen wichtig erscheint,
- „Eselsbrücken“,
- Stellen, bei denen Sie besondere Schwierigkeiten hatten o.Ä.
- ...

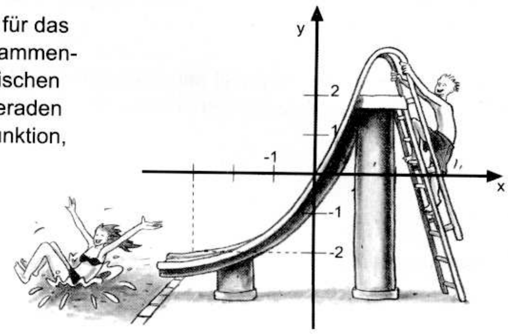
Aus den Vorschlägen aller Gruppen wird ein Quiz für alle erstellt.

F Funktionen – Suchdienst

Vorausgesetzte Bausteine: L, E, N, K, S

Sie lernen **Funktionsterme zu bestimmen,** wenn einzelne Bedingungen gegeben sind.

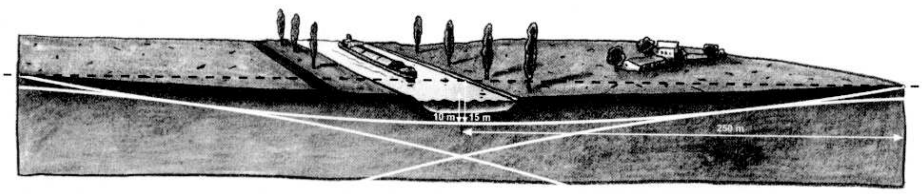
1. „Rutsche"
   Aus drei Blechteilen soll eine Rutschbahn für das Schwimmbad so wie in der Abbildung zusammengesetzt werden. Das gebogene Stück (zwischen x = –3 und x = 0) soll ohne Knick an die geraden Teile anschließen. Bestimmen Sie eine Funktion, deren Graph passend geformt ist.



2. Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat die gleichen Nullstellen wie $g(x) = x^2 - x - 2$. Ihr Graph schneidet die y-Achse mit der Steigung –3 im Punkt P(0I–2).

3. Eine ganzrationale Funktion 4. Grades besitzt bei x = 0 ein Extremum und bei x = –1 einen so genannten Sattelpunkt. Ein Sattelpunkt eines Funktionsgraphen ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente. Die Tangente bei x = 1 hat die Gleichung y = 48x – 48.

4. Für den Bau eines norddeutschen Radrundwanderwegs muss ein Kanal untertunnelt werden. Auf Grund des ebenen Geländes kann der Tunnel symmetrisch angelegt werden, d.h., die Tunneleinfahrten sind jeweils 15 m höher als die tiefste Stelle und 250 m weit entfernt von der tiefsten Stelle unter dem Kanal. Diese liegt 10 m unter der Wasseroberfläche. Ein günstiger Verlauf des Tunnels wird erreicht, wenn man wie in dem Bild skizziert drei Parabeln mit gleichem Öffnungsgrad aneinander fügt. Für eine angenehme und zügige Fahrt durch den Tunnel muss die Strecke zudem knickfrei sein und die Einfahrten an den höchsten Punkten (Scheitelpunkte der Parabeln) der Strecke liegen.



Kapitel 4

Anmerkungen zu den Bausteinen im Lehrerheft

Baustein W – Werkzeug: Ableitungsbegriff, Ableitungsregeln

Inhalt: Wiederholung und Vertiefung des Ableitungsbegriffs, Ermitteln der Ableitungsregeln aufgrund von Beispielen
Erfahrungen, Anmerkungen: Eine mathematische Herleitung und Beweis der Regeln wird hier nicht angeregt - falls dies gewünscht wird, müssen diese Aspekte vorher oder nachher im Unterricht erarbeitet werden.

Baustein A – Ich gehe eine Ableitungsfunktion
Inhalt: Es werden Zeit-, Entfernungs- und Zeit-Geschwindigkeits-Diagramme interpretiert und der Bezug zu Graphen von Funktionen und deren Ableitungsfunktionen hergestellt. Steht ein Ultraschallmessgerät zur Verfügung, können Bewegungsabläufe unmittelbar graphisch aufgezeichnet werden.
Erfahrungen, Anmerkungen: Die Fragen des Bausteins können auch ohne ein Ultraschallmessgerät bearbeitet werden, dann entfällt lediglich der Zusatz in Aufgabe 2. Jedoch ist der Einsatz eines solchen Gerätes von großem Vorteil, da damit der Begriff der Ableitung und Ableitungsfunktion durch eigene experimentelle Erfahrungen gestützt werden kann. Ein solches Ultraschallmessgerät ist zum Beispiel das CBR (Computer Based Ranger) der Firma Texas Instruments, das auch ausgeliehen werden kann.

Bausteine E, L und K – Extremes, „Lange Leitung“ (höhere Ableitungen) und „Sanft Krümmt sich…“

Inhalt: Bestimmen (lokaler) Extremstellen, Erarbeiten der Bedeutungen der 1. und 2. Ableitung, Wendepunkt, Links- und Rechtskurve
Erfahrungen, Anmerkungen: Diese drei Bausteine sind inhaltlich stark vernetzt, da die Aspekte des einen Bausteins jeweils zum Verständnis der beiden anderen beitragen. Es hat sich gezeigt, dass Schülerinnen und Schüler häufig vor der fertigen Bearbeitung eines der drei Bausteine zunächst einen der anderen beginnen. Dieses Vernetzen sollte bewusst gewährt werden, um die Aspekte im Zusammenhang zu begreifen. Aus diesem Grund sind die drei Bausteine in der Erarbeitungsübersicht zyklisch angeordnet. Das Merkposter (vgl. A) kann zur Visualisierung ausgelegt oder ausgehängt werden. In Baustein E wird bewusst nach den Unterschieden und Möglichkeiten der drei verschiedenen Darstellungsarten einer Funktion (Term, Tabelle, Graph) gefragt (s. auch Bausteine N und G). Während der Gruppenarbeit kann es hilfreich sein, verschiedene Möglichkeiten der hinreichenden Bedingung einzubeziehen. Folgende Wege wurden bisher bei Schülergruppen beobachtet:

- Betrachten der Steigung für x-Werte etwas kleiner bzw. etwas größer als der mögliche Extrempunkt (Vorzeichenwechselkriterium)
- Einsetzen von Funktionswerten für x-Werte etwas kleiner bzw. etwas größer als der mögliche Extrempunkt
- Betrachten des Graphen

Das traditionell verwendete Einsetzen in die 2. Ableitung wurde nur von Gruppen benutzt, die „Wiederholer“ in der Gruppe hatten oder wenn das Verfahren aus dem Schulbuch übernommen wurde. Dieser Weg ist in jedem Fall am schwierigsten zu verstehen. Beim Besprechen während der Posterpräsentation sollten die verschiedenen Möglichkeiten gesammelt, gegebenenfalls erklärt, vor allem aber diskutiert und verglichen werden. Die Notwendigkeit des Adjektives „lokal“ im Gegensatz zu „absolut“ war für die meisten selbstverständlich, dennoch sollte dies während der Präsentation noch einmal betont werden.

Baustein N – Die Null-Linie
Inhalt: Bestimmen von Nullstellen
Erfahrungen, Anmerkungen: Ähnlich wie in den Bausteinen E und G werden hier bewusst die drei Darstellungsarten von Funktionen (Term, Tabelle, Graph) einbezogen und die jeweiligen Vorteile bei der Bestimmung der Nullstellen erfragt. Polynomdivision wurde hier nicht aufgenommen, um die gesamte Thematik der Lernwerkstatt zu begrenzen.

Baustein S – Symmetrien
Inhalt: Erkunden der Symmetrieeigenschaften von Graphen
Erfahrungen, Anmerkungen: Es geht um Symmetrien zwischen verschiedenen Funktionsgraphen und Symmetrieeigenschaften einzelner Funktionsgraphen. Auch wenn durch die Frage „Erkennt man am Term schon die Symmetrie?“ die Unterscheidung in gerade und ungerade Funktionen nahe gelegt wird, bleibt die Frage nach der konkreten Symmetrieachse oder dem Spiegelpunkt bewusst offen. Manche Schülergruppen haben auch Symmetrieeigenschaften zu Parallelen zur y-Achse oder zu anderen Punkten als dem Nullpunkt einbezogen. Die verschiedenen Ansätze sollten gegebenenfalls in der ganzen Klasse während der Präsentationsphase verglichen werden.

Bausteine Z, R – Spiele
Inhalt: Vertiefen der neuen Erkenntnisse
Erfahrungen, Anmerkungen: Die beiden Spiele bieten viel Gesprächsanregung über die Inhalte. Es ist ratsam, den Spielplan (bei R) bzw. die Legeteile (bei Z) mehrfach zu kopieren, damit eine Mehrfachnutzung der Spiele parallel möglich ist. Spielplan und Legeteile sollten laminiert ausgelegt werden. Beim Reiterspiel (R) müssen ein entsprechend präparierter Würfel und Spielfiguren zur Verfügung stehen.

Baustein C – Check-up
Inhalt: Überprüfen der Erkenntnisse aus den Bausteinen E, L und K
Erfahrungen, Anmerkungen: Dieser Baustein dient der Selbstkontrolle und ist zunächst eine Sammlung von Aussagen, die begründet als wahr oder falsch zu erkennen sind.

Baustein G – Geheimnis lüften
Inhalt: Anwenden der neuen Erkenntnisse
Erfahrungen, Anmerkungen: Bei einer klassischen Kurvendiskussion ist eine Funktion durch einen Term gegeben und die Aufgabenstellung lautet: „Untersuche diese Funktion“. In Baustein G wird die gleiche Aufgabenstellung genutzt – jedoch nicht nur bezogen auf eine Funktion, die durch einen Term gegeben ist, sondern auch auf Funktionen, die alleine durch den Graphen oder alleine durch eine Tabelle gegeben sind. Damit soll einmal mehr die Reflexion über Vor- und Nachteile der verschiedenen Darstellungsarten einer Funktion (Term, Graph, Tabelle) angeregt werden.

Baustein Q – Quiz
Inhalt: Reflektieren der neuen Erkenntnisse
Erfahrungen, Anmerkungen: Die Schülergruppen sollen zu Aspekten der Lernwerkstatt Quizfragen zusammenstellen und allen als Übungs- und Selbstkontrollmöglichkeit anbieten. Das Besprechen bzw. Spielen des Quiz bietet sich als Abschluss der Lernwerkstatt an.

Baustein F – Funktionen-Suchdienst
Inhalt: Bestimmen der Funktionsgleichung aufgrund gegebener Bedingungen
Erfahrungen, Anmerkungen: Bei diesen sogenannten „Steckbriefaufgaben“ werden die neuen Kenntnisse angewendet. Dieser Baustein kann auch im Anschluss an die Lernwerkstatt als eigener Themenblock bearbeitet werden, eventuell nach der Lernkontrolle oder Klausur (vgl. Anhang A, Seite 273).

Teil II

„Das ABC der ganzrationalen Funktionen“ – Theoretischer Hintergrund zur Konzeption und Entwicklung

Unterrichtsplanung ist ein Zusammenspiel von Überlegungen auf verschiedenen Ebenen. Es müssen Entscheidungen getroffen werden hinsichtlich

- der konkreten Lerngruppe mit ihren fachlichen, sozialen und personalen Voraussetzungen,
- des Themas, mit dem bestimmte Unterrichtsziele verbunden sind,
- der Unterrichtsmethode als konkreter Organisation des Unterrichts,
- der verwendeten Hilfsmittel, die den Lehr- und Lernprozess unterstützen und bereichern sollen.

Bis auf den ersten Aspekt gelten diese Gedanken auch für die Entwicklung von Unterrichtsmaterialien und nicht nur für die Planung von Unterricht in einer konkreten Lerngruppe. Die Aspekte lassen sich konzentrieren auf „Was?“, „Wie?“ und „Womit?“. In der konkreten Unterrichtsplanung sind das die Fragen nach Inhalt, Methode und Medium, die keineswegs sequentiell bearbeitet werden können, sondern sich gegenseitig bedingen. Es handelt sich um ein komplexes Gefüge von Überlegungen und Erwägungen.

Ein solches Geflecht bezeichnet Chevallard (1999) in seinem anthropologischen Zugang zur Mathematikdidaktik als „Praxeologie“. Eine „Praxeologie“ ist bestimmt durch die Faktoren „tasks, techniques, technologies and theories“. „Tasks“ sind für Chevallard die Aufgaben oder mathematischen Probleme, in die der Inhalt eingebettet ist und „Techniques“ die Techniken, die benutzt werden, um die Aufgabe oder das Problem zu lösen. „Technology“ bezeichnet in Chevallards Theorierahmen die Meta-Ebene der Techniken – zu sehen als Diskurs, durch den die einzelnen Techniken erklärt und fundiert werden. „Theorie“ liefert die strukturierende Basis für den technologischen Diskurs und kann als Technologie der Technologie gesehen werden oder als Para-Ebene der konkreten Techniken. Um Missverständnisse zwischen Chevallards Theorie und der gebräuchlichen Bezeichnung von „Technologie“ als digitale Medien zu vermeiden, haben Artigue (2002) und Lagrange (2005) die vier Faktoren auf die drei „tasks, techniques und theory“ reduziert, indem sie „technology“ im Sinne Chevallards unter den Faktor „theory“ subsumiert bzw. die Bedeutung von „theory“ ausgeweitet haben. Damit hilft dieser Theorierahmen auch beim hier untersuchten Unterrichtsmaterial, die Konzeption zu gestalten und zu beurteilen. Zentral ist für Artique und Lagrange der Begriff der „Technique“ als die Art und Weise, eine Aufgabe zu lösen. Eine solche Technik kann einerseits eine arbeitserleichternde Routine sein, also einen pragmatischen Wert besitzen („pragmatic value“). Sie kann andererseits aber auch epistemischen Wert haben („epistemic value“), wenn die Technik zum Verstehen der verknüpften mathematischen Aspekte beiträgt. Dies geschieht zum Beispiel dadurch, dass Fragen zum mathematischen Wissen angeregt werden. Dabei geht es um Techniken, die sowohl Lernende und Lehrende erwerben – Techniken im Sinne unterschiedlicher Strategien, unterschiedlicher Anforderungen inhaltlicher, praktischer und theoretischer Natur. Dazu gehört auch die äußere Organisation des Unterrichts, die dem Ziel dient, einen Rahmen für die Fülle der individuellen Lernprozesse zu schaffen.

Inhalt und Ziele des Unterrichts bestimmen die Gestaltung dieses Gefüges. Dies gilt für Lehrpersonen bei der Unterrichtsplanung ebenso wie für Schülerinnen und Schüler bei der Gestaltung ihrer Gruppenarbeit. Tragen kann das Motto, dass die äußere Organisation und der Rechnereinsatz stets im Dienste des Lehr- und Lernprozesses stehen muss und zu entscheiden ist, was beim jeweiligen Inhalt am besten unterstützt.

Für das vorgestellte Material wurden die Fragen nach Inhalt, Medium und Methode wie folgt beantwortet: Es geht um das Thema „Untersuchung ganzrationaler Funktionen“, wobei als Medium Computeralgebra genutzt und als Unterrichtsmethode die Lernwerkstatt gewählt wird. Damit sind im Wesentlichen folgende Ziele verbunden:

Inhaltlich-fachliches Ziel Die Schülerinnen und Schüler sollen verschiedene Kriterien zur Funktionsuntersuchung kennenlernen und diese souverän einsetzen und anwenden können. Dabei sollen sie sowohl lokale Eigenschaften markanter Funktionswerte als auch globale Eigenschaften eines Kurvenverlaufs nutzen können. Das Explorieren und Anwenden der verschiedenen Kriterien soll aufgrund einer Vielfalt kognitiver Tätigkeiten erreicht werden. Dazu gehört zum Beispiel, mathematische Objekte zu analysieren, zu strukturieren, auf verschiedene Weise darzustellen, die Arbeit zu reflektieren, um so Zusammenhänge zwischen verschiedenen Ebenen herstellen zu können.

Mediales Ziel Die Schülerinnen und Schüler sollen passend zu ihrem Lernprozess und Lösungsweg Computeralgebra integrieren. Dabei kann Computeralgebra zum Beispiel genutzt werden zum Generieren mathematischer Objekte, die untersucht werden, zum gezielten Visualisieren von Ideen und Vermutungen sowie zum numerischen Berechnen und schnellen Darstellen.

Sozial-personales Ziel Die Schülerinnen und Schüler übernehmen Verantwortung für den eigenen Lernprozess und sind mitverantwortlich für die Arbeit der jeweiligen Gruppe. Dabei müssen sie ihre Rolle im sozialen Gefüge finden, mit anderen aushandeln und sich mit den eigenen Fähigkeiten kreativ und gestalterisch einbringen.

Diese Ziele passen zu den Entscheidungen auf der Ebene des Inhalts, des Mediums und der Methode. In den folgenden Kapiteln werden nun die Entscheidungen auf diesen drei Ebenen und der genannten drei Grundziele der Unterrichtsreihe theoretisch fundiert und reflektiert.

- Im ersten Teil zum **Inhalt** (Kapitel 5) geht es darum, „Funktionsuntersuchung" als Unterrichtsthema auf verschiedene Weise zu durchleuchten und aufzuzeigen, auf welche Weise die Ziele des Themenbereichs im konkreten Material verfolgt werden. Diese Analyse geschieht an Hand der drei allgemeinen Ziele, wie Winter (1995) sie für den Mathematikunterricht ausweist.

- Mit der Entscheidung für „Computeralgebra" als **Medium** sind vielfältige Überlegungen verbunden - sowohl zum grundsätzlichen Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht als auch zum speziellen Einsatz bei der hier untersuchten Lernwerkstatt. Diese Fragen zum „didaktischen Mehrwert" von Computeralgebra im Rahmen der hier erörterten Unterrichtsreihe werden in Kapitel 6 an Hand von Forschungsergebnissen aus der Literatur diskutiert.

- Die „Lernwerkstatt" als **Methode** im Unterricht ist in Deutschland in Grundschulen ebenso zu finden ist wie an Hochschulen. „Lernwerkstatt" steht dabei für einen Ort – im realen wie im übertragenen Sinn – der vielfältige Handlungen zu einem Themenbereich und das Entstehen eines gemeinsamen Produktes im gemeinsamen Tun ermöglicht. Im Kapitel 7 geht es um weitergehende Gedanken zu dieser Unterrichtsmethode und wie sie ihren Niederschlag im konkreten Material gefunden hat.

Kapitel 5

Zum Inhalt: Das Thema „Funktionsuntersuchung“ im Analysis-Unterricht

Winter (1995) hat in prägnanter Weise die spezifischen, fachlich-inhaltlichen Ziele des Mathematikunterrichts beschrieben und sie dabei in drei Bereiche spezifiziert. Schülerinnen und Schülern sollen:

- Erscheinungen aus der Natur, Gesellschaft und Kultur mit Hilfe der Mathematik wahrnehmen und verstehen (Mathematik als Anwendung)

- mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen und Bildern, als geistige Schöpfungen verstehen und weiter entwickeln (Mathematik als Struktur)

- in der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen überfachliche Kompetenzen erwerben und einsetzen (Mathematik als kreatives und intellektuelles Handlungsfeld).

Diese Zielformulierungen werden in vielen Curricula verschiedener Schulformen und -stufen und verschiedener Bundesländer als Basis genutzt, den Lehrplan zu entwickeln (z.B. Rahmenplan für die Oberstufe Hamburg, Kernlehrplan für die Sekundarstufe I NRW). Auch bei den Bildungsstandards, die die Kultusministerkonferenz für den Mathematikunterricht herausgegeben hat, klingen diese Ziele in ähnlicher Weise als Grundlage an ([KMK 2003], S.7). In der Defintion der *mathematical literacy* im PISA-Framework werden die hier genannten Aspekte ebenfalls fokussiert. Es heißt hier:

> *Mathematische Grundbildung ist die Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht.* ([PISA 2000], S.47)

Nimmt man diese Ziele ernst, müssen sie in die konkrete Unterrichtsplanung und -konzeption einfliessen und dort mit Leben gefüllt werden. Auch wenn in der einzelnen Unterrichtsstunde nur eine Ahnung solcher Ziele gesät werden kann, so verhilft bereits dies, dass Unterricht nicht in der Enge einzelner stofflicher Teilziele verharrt, sondern dass übergreifende Zusammenhänge mitgedacht und vermittelt werden. Je stärker sich die konkrete Planung an solch höheren Zielen orientiert, desto mehr kann der Unterricht dazu beitragen, Mathematik als das darzustellen, was sie für unsere Kultur und Gesellschaft ist: eine faszinierende Wissenschaft, die in vielerlei Hinsicht unser Leben beeinflusst. Solche Ziele und Gedanken lassen sich nicht nur als Fundament der Unterrichtsplanung nutzen, sondern können auch als Maßstab dienen, Unterricht zu reflektieren und zu überprüfen.

Die drei Zielbereiche nach Winter sind keineswegs als disjunkt anzusehen, sondern sie bedingen sich vielmehr gegenseitig und gehören als ein Ganzes zusammen. Es gibt kein mathematisches Handeln ohne Inhalte und insbesondere können Zusammenhänge aus Natur und Gesellschaft nicht mathematisch modelliert werden, wenn das Handwerkszeug in Form von Inhalten und mathematischen Aktivitäten fehlt. Damit gilt für den Mathematikunterricht das gleiche Paradigma wie für jegliche wissenschaftliche Entwicklung: Nur aus dem Zusammenspiel und der Wechselwirkung zwischen Modell- und Theoriebildung kann es gelingen die Entwicklung voranzutreiben. So erwachsen einerseits wichtige Impulse zur Theorie- und Begriffsbildung aus Anwendungen und andererseits hilft die Theorie, Phänomene zu erklären. Diese Interdependenzen werden auch von Vollrath (1994) betont und stellt Jahnke (1999) sie als Merkmal der historischen Entwicklung konkret heraus:

> *Die Idee des Naturgesetzes stand Pate bei der Herausbildung des mathematischen Funktionsbegriffs, und umgekehrt wäre diese Idee nie so einflußreich geworden, wenn die mathematische Analysis nicht so erfolgreiche Methoden entwickelt hätte, funktionale Abhängigkeiten zu untersuchen.* ([Jahnke 1999], S.1)

Dies gilt insbesondere auch für den einzelnen Themenbereich. Auch die Aspekte der theoretischen Fundierung zum Thema „Funktionsuntersuchung“ hinsichtlich Anwendung, mathematischer Struktur und Handlungsfeld können nicht voneinander getrennt gesehen werden. Dennoch werden im Folgenden die vielfältigen theoretischen Reflexionen an Hand der drei Winterschen Zielen strukturiert, um eine leichtere Übersicht über die unterschiedlichen Erörterungen zu ermöglichen. Dabei werden entsprechend dem thematischen Rahmen der Lernwerkstatt zunächst grundlegende Aspekte der Funktionenlehre aufgeführt und diese dann durch das Einbeziehen der Möglichkeiten der Differentialrechnung ausgeweitet.

5.1 Funktionsuntersuchung zum Beschreiben von Zusammenhängen aus Natur und Gesellschaft

5.1.1 Allgemeine Gedanken

Für Vollrath (1994) stellt der Funktionsbegriff *auch in den Anwendungen einen der fruchtbarsten Begriffe der Mathematik dar* ([Vollrath 1994], S.122). Die Anwendungsbereiche der Funktionenlehre finden sich in Natur-, Sozial- und Gesellschaftswissenschaften in vielfältiger Weise – auch solche, die für Jugendliche einsichtig und bedeutsam sein können.

Der Mathematikunterricht kann in diesem Themenbereich einen sinnvollen Beitrag zur „Umwelterschließung“ leisten, wie es Vollrath nennt (1994, S.129). Er expliziert, was gerade das Untersuchen von Funktionen dazu beitragen kann. Dabei geht es zunächst um das Betrachten, Beschreiben und Erklären der Umwelt mit Hilfe von Funktionen und in einem weiteren Schritt um das Erforschen und das rationale und kreative Handeln in der Umwelt. Damit beschreibt er zwei Handlungsebenen, die auch für den Unterricht weisend sein können: die eine des unmittelbaren Erfassens des Kontextes mit Hilfe des mathematischen Modells und zum anderen die Ebene des reflektiven und kritischen Umgangs mit dem Modell als Ausgangspunkt für weitergehende Handlungen wie Interpretationen und Folgerungen. Diese beiden Ebenen betont auch Malle (2000) als verschiedene Schritte einer Funktionsuntersuchung und sie finden sich auch im sogenannten Modellierungskreislauf (vgl. [Burkhardt 1981], [Blum 1985], [Kaiser 1995]). Es ist einerseits das Modellieren als Übergang vom Realmodell zum mathematischen Modell und andererseits das Interpretieren und Validieren als Rück-Weg vom mathematischen Modell zur Realsituation. Nimmt man zum Beispiel die Kosten-Übersicht in Abhängigkeit zur Produktionsmenge eines Wirtschaftsbetriebes, so geht es auf der ersten Ebene darum, die Abhängigkeiten zwischen Produktionsmenge und Kosten zu erkennen, diese zunächst verbal und dann durch ein mathematisches Modell zu beschreiben. Auf der anderen Ebene lassen sich die Erkenntnisse aus der mathematischen Modellierung und Bearbeitung zur Problemlösung nutzen, um beispielsweise Prognosen zu bilden oder mögliche Einflussfaktoren auf die Entwicklung zu ermitteln.

Malle (2000) sieht in der Funktionsuntersuchung *„in einem gewissen Sinne sogar einen roten Faden durch die gesamte Schulmathematik“* ([Malle 2000], S. 4) und postuliert ein Einbeziehen der Funktionsuntersuchung nicht nur in der Sekundarstufe II, sondern auch in der Sekundarstufe I. Diese Forderung findet man auch explizit in den Bildungsstandards, die die Kultusministerkonferenz herausgegeben hat ([KMK 2003], S.13). Als Funktionsklassen werden neben den einfachen ganzrationalen Funktionen (lineare und quadratische Funktionen) die Sinusfunktion als trigonometrische Funktion und die Exponentialfunktion als weitere transzendente Funktion in den Kanon aufgenommen. Im Zusammenhang mit diesen Funktionsklassen werden Tätigkeiten im Sinne des Modellierens und Untersuchens von Funktionen für die Sekundarstufe I gefordert. Dabei geht es darum, besondere Merkmale und Eigenschaften von Funktionen zu untersuchen und in sinnvollen Kontexten anzuwenden (vgl. [KMK 2003], S.13). Dabei spielen nicht nur Funktionen eine Rolle, die sich durch einen Funktionsterm beschreiben lassen, sondern auch solche, die nur durch einen Graphen, eine Tabelle oder eine Situation gegeben sind, um mathematisches Wissen und Fertigkeiten kennen zu lernen und im Rahmen von Realkontexten anzuwenden. Damit wird ein Untersuchen von Funktionen nicht nur quantitativ exakt, sondern auch qualitativ interpretativ angeregt. Mit dieser Vielfalt wird Schülerinnen und Schülern eine grundlegende Bedeutung von Funktionen verdeutlicht, die Tall beschreibt als: „*One purpose of the function is to represent how things change.*“ ([Tall 1997], S.1)

Auch wenn Funktionsuntersuchungen im wahrsten Sinne des Wortes schon früh in der Sekundarstufe I möglich und wünschenswert sind, so erweitert sich doch bis zur Sekundarstufe II maßgeblich das Repertoire an Untersuchungswerkzeugen. Durch die Differential- und Integralrechnung stehen neue Mittel zur Verfügung, die Merkmale von Funktionen detaillierter zu untersuchen und neue Merkmale (z.B. lokale Änderungsraten) in die Analyse einzubeziehen. Überdies werden die mathematischen Elemente der Funktionsuntersuchung aus der Sekundarstufe I abgerundet und sind weitere Funktionsklassen bekannt (Trigonometrische Funktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen). Damit stehen drei große Bereiche der Anwendungen von Funktionenlehre im Rahmen der Analysis in der Sekundarstufe II zur Verfügung (nach [Tietze/Klika/Wolpers 1997], S.224):

- *Erfassung funktionaler Zusammenhänge und deren Diskussion (z.B. Kostenfunktionen, Gewinnfunktionen, Steuerfunktionen, Bremsweg)*
- *Optimierungsaufgaben (z.B. Verkehrsdurchsatz, Straßen-Trassierung, Optimierung von Verpackungen)*
- *Wachstumsfragen und dynamische Systeme (z.B. Bevölkerungsdynamik, Zerfallsprozesse, Marktentwicklung, Ausbreitung einer Epidemie/eines Gerüchts, Abkühlung von Flüssigkeiten)*

Als neues Untersuchungsinstrument für all diese Bereiche steht in der Sekundarstufe II zunächst die Ableitung im Zentrum der Betrachtung. Sie kann als ein Maß genutzt werden, den Grad von Änderung zu beschreiben, was in vielen verschiedenen Anwendungsbereichen eine wichtige Rolle spielt. Beim Ableitungsbegriff werden in der mathematikdidaktischen Diskussion verschiedene Grundvorstellungen als „Träger von Bedeutung“ (vgl. [vom Hofe 1995]), [Blum 2000]) unterschieden. So nennt Schneider (2000) zum Beispiel zwei Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff – die Ableitung als lokale Änderungsrate und als lineare Approximation. Hußmann (2003) nennt als dritte Vorstellung die Ableitung als Tangentensteigung. Übereinstimmend wird unter Didaktikern die Vorstellung von Ableitung als lokale Änderungsrate als umfassendere Basis zur Modellierung der meisten Anwendungsbereiche gesehen. Aus diesem Grund wird in manchen neueren Schulbücher dieser Weg beschritten (z.B. das schweizerische Schulbuch „Differenzieren – do it yourself“, [DMK 2003]). Jedoch gibt es noch viele gängige Schulbücher, die aus Gründen der leichteren Visualisierung die Vorstellung von Ableitung als Tangentensteigung für den Einstieg in den Mittelpunkt stellen. So verständlich dies sein mag, so bedauerlich ist es, denn es birgt die Schwierigkeit in sich, dass für Lernende nach einer engen Grundlegung des Begriffs eine Ausweitung der Vorstellungen schwierig sein kann. Auch Blum/Törner (1983) haben in ihrer Didaktik der Analysis deshalb den Fokus auf die lokale Änderungsrate gelegt, um damit Schülerinnen und Schülern das umfassendere Instrument zur Modellierung von Anfang an nahe zu bringen. Sie listen eine Vielzahl von Anwendungsbereichen zur Ableitung als lokale Änderungsrate tabellarisch auf, um das Modellierungspotenzial dieses Begriffs zu verdeutlichen. Aus dieser Liste dienen einige Beispiele zur Veranschaulichung, um die Bandbreite der für den Schulunterricht interessanten und durchaus motivierenden Kontexte zu verdeutlichen. Es ist jeweils als Trio $x - f(x) - f'(x)$ genannt ([Blum/Törner 1983], S.92):

- *Zeit – Weg – Momentangeschwindigkeit*

- *Radius – Kreisfläche – Kreisumfang*
- *Temperatur – Länge – Expansionskoeffizient*
- *Zeit – Anzahl Infizierter – Ausbreitungsgeschwindigkeit der Epidemie*
- *Zeit – Quantität Population – Wachstumsgeschwindigkeit*
- (Hinzufügen könnte man): Zeit – Finanzieller Gewinn – Wachstumsrate

Eine ähnliche Liste findet sich bei Hahn/Prediger (2004) (S.219), die die obige jedoch weiter entwickelt haben durch Spezifizierungen, was Extrem- und Wendepunkte in verschiedenen Kontexten bedeuten. Damit stellen sie die Kraft der Detail-Merkmale einer Funktion für verschiedene Modellierungen explizit heraus. Ein Beispiel dieser Weiterentwicklung findet sich in Tabelle 5.1.

f(x)	*f´(x)*	Extrempunkte	Wendepunkte
Höhe (Menge) f der Staatsverschuldung zu einem Zeitpunkt (zu Beginn des Jahres) x	Jährliche Neuverschuldung: Wachstumsgeschwindigkeit der Schulden pro Jahr	Hochpunkt: Höchststand der Staatsschulden, ab hier nehmen die Schulden ab	Neuverschuldung sinkt, d.h. der Schuldenberg wächst wieder langsamer

Tabelle 5.1: Beispiel einer inhaltlichen Deutung

Anwendungsbereiche von Funktionen einzubeziehen hat nicht nur den Sinn, die Mathematik in ihrer Bedeutung für Natur und Gesellschaft zu erfassen, sondern ist ein entscheidender Schritt, Schülerinnen und Schüler zum Verständnis des Funktionsbegriffs zu führen. So hat bereits Felix Klein (1968) für die Einführung des Funktionsbegriffs gefordert:

> *[Er] soll gewiß nicht durch abstrakte Definitionen eingeführt, sondern an elementaren Beispielen, wie man sie schon bei Euler in großer Zahl findet, dem Schüler als lebendiges Besitztum überliefert werden.* ([Klein 1968], S. 221)

Er postulierte damit als erster den Anspruch des genetischen Prinzips, das Hans Freudenthal als Prinzip der Nacherfindung aufgegriffen und viele seither als ein zentrales Unterrichtsprinzip betont haben. Schubring (1978) beschreibt es sehr treffend und prägnant:

> *Das genetische Prinzip [$\cdots$] fasst mathematische Begriffe als „gewordene“ auf und will ihr „Werden“ im Lernprozess nachvollziehen lassen.* ([Schubring 1978], S.1)

Werden Lernumgebungen und Aufgaben nach dem genetischen Prinzip gestaltet, lässt man Schülerinnen und Schüler an der wechselseitigen Beziehung zwischen Modell- und Theoriebildung teilhaben.

5.1.2 Umsetzungen in der Lernwerkstatt

Die Idee, Schülerinnen und Schüler die Bedeutung von Funktionen zur Modellierung von Realkontexten zu verdeutlichen, wurde in der Lernwerkstatt auf verschiedene Weise realisiert:

- Eine Modellierungsaufgabe bildet den Rahmen für die gesamte Lernwerkstatt. Dies wird im Lehrerheft ausdrücklich empfohlen, damit die Bedeutung und Notwendigkeit der Untersuchung von Funktionen aufgezeigt wird und so eine Leitlinie und ein Motivationsstrang für die Arbeit in der Lernwerkstatt geboten werden. Eine solche Modellierungsaufgabe sollte vor der Lernwerkstatt als Einstieg gewählt sowie nach der Lernwerkstatt wieder aufgegriffen werden, um die Lösungsmöglichkeiten mit den gewonnenen Erkenntnissen neu zu diskutieren. Dadurch gewinnt eine solche Aufgabe die Funktion einer übergeordneten Rahmung, auf die nicht nur zu Beginn und zum Schluss, sondern auch zwischendurch Bezug genommen werden kann. Als eine mögliche Aufgabe wird im Lehrerheft eine Aufgabe zur betrieblichen Ertragsoptimierung vorgeschlagen (Seite 16 bzw. [Barzel/Fröhlich/Stachniss-Carp 2003], S. 2).

- Das Vorwort im Schülerheft beginnt damit, dass die Bedeutung der mathematischen Modellierung mithilfe von Funktionen herausgestellt wird (vgl. 3)

- In verschiedenen Aufgaben in den einzelnen Bausteinen werden explizit Modellierungsaspekte integriert - so in Baustein A (Seite 24), Baustein E (Seite 27), Baustein K (Seite 28) und Baustein F (Seite 38).

Durch den Bezug zur Modellierung sollen Funktionen nicht nur im Gesamt als nützliches Hilfsmittel zur Beschreibung von Beziehungen und Veränderungen wahrgenommen werden, sondern auch einzelne spezifische Merkmale einer Funktion in ihrer Bedeutung für Anwendungen herausgearbeitet werden.

Dabei spielen sowohl lokale wie globale Eigenschaften von Funktionen eine wichtige Rolle. Zu den lokalen Eigenschaften gehören die Merkmale einzelner Punkte wie zum Beispiel Nullstellen oder Extrempunkte und zu den globalen Eigenschaften die Fragen nach Eigenschaften in bestimmten Intervallen oder im gesamten Definitionsbereich wie zum Beispiel Änderungsraten oder Symmetrien.

Lokale Eigenschaften

Exponierte Punkte eines Funktionsgraphen mit ihren Eigenschaften zu erkennen und zu bestimmen ist ein wichtiges Detail-Instrument für die Modellierung eines Realkontextes. So haben zum Beispiel **Nullstellen** vielerlei Bezüge zu Anwendungsfragen. Die hohe Relevanz von Fragen, wann ein Gewinn, wann eine Geschwindigkeit, wann eine Temperatur null wird, ist leicht einzusehen. Auch die Frage nach dem Optimum ist in vielen Bezügen gut nachvollziehbar - wann ist der Gewinn am höchsten, das Auto am schnellsten, die Entfernung am größten oder kleinsten. Diese Fragen bieten durch ihre gute Nachvollziehbarkeit ein wichtiges Fundament, die mathematischen Aspekte für Schülerinnen und Schüler verstehbar zu machen und damit exemplarisch die Bedeutung der Mathematik herauszustellen. Nicht nur die Frage nach der Null- oder nach der Extremstelle, sondern auch die verallgemeinerte Fragestellung, wann bzw. bei welchem x ein bestimmter Funktionswert erreicht wird, lässt sich gut an realen Kontexten verdeutlichen. Einige Beispiele: *Wann erreicht die Geschwindigkeit 40 km/h? Bei welchem Winkel steht die angestellte Leiter 2m an der Wand hoch? usw.* Natürlich kommt auch die umgekehrte Frage nach den Funktionswerten zu gegebenem x in vielen Anwendungsbezügen vor.

Solche Fragen und Aspekte zu lokalen Eigenschaften von Funktionen durchziehen die gesamte Lernwerkstatt und sind auch Namensgeber für einzelne Bausteine (z.B. E für Extreme, N für Nullstellen). In Baustein A (Seite 24) sind lokale Eigenschaften integriert, wenn es darum geht, die Graphen zu interpretieren und passende Situationen und Bewegungsabläufe zuzuordnen und nachzuvollziehen. Dabei sind einzelne markante Punkte hilfreiche Anker, um die Zusammenhänge zu erkennen. Baustein E (Seite 27) beginnt mit einer derartigen allgemeinen Feststellung:

> *„Häufig ist es wichtig zu wissen (z.B. bei Kostenfunktionen), wo in einem bestimmten Bereich Funktionswerte minimal oder maximal werden.“* ([Barzel/Fröhlich/Stachniss-Carp 2003], S.8)

Globale Eigenschaften

Auch für die globalen Eigenschaften finden sich Beziehungen zu realen Anwendungen: Bei der Beschreibung von Formen, Straßenverläufen und allgemeinen Prozessverläufen. Baustein K (Seite 28) nutzt einen Funktionsgraphen als Straßenverlauf, um Schülerinnen und Schülern die Thematik zu verdeutlichen und deren Relevanz aufzuzeigen. Hierbei wird insbesondere das Problem der Krümmung und Richtung einer Kurve thematisiert. Baustein S (Seite 313) greift die wichtige Frage nach der Symmetrie auf, die bei der mathematischen Modellierung von Formen einen wichtigen Hinweis zu einem passenden Modell liefern kann.

5.2 Funktionsuntersuchung als mathematischer Gegenstand

5.2.1 Allgemeine Gedanken

Nach Jahnke (1999) hat kein anderes mathematisches Gebiet die Entwicklung des neuzeitlichen wissenschaftlichen Denkens so stark beeinflusst wie das Studium der Abhängigkeiten der veränderlichen Größen. Den Begriff *functio* als solchen benutzte zuerst Leibniz am Ende des 17. Jahrhunderts, um eine Variable y zu beschreiben, die sich in Abhängigkeit zu einer veränderlichen Variablen x veränderte. Er beschrieb dies schon in konkreten Formeln wie etwa $y = x^2$, was im darauf folgenden Jahrhundert zu $y = f(x)$ wurde. Von Beginn an war der Begriff der Funktion mit dem zugehörigen Graphen verbunden als einer Menge von Punkten $(x, f(x))$ im kartesischen Koordinatensystem. Im 20. Jahrhundert entwickelte sich daraus die mengentheoretische Definition einer Funktion als die Menge G geordneter Paare

$$G = (x, y) \in A \times B | x \in A, y \in B$$

wobei es zu jedem $x \in A$ ein $y \in B$ gibt, so dass $(x, y) \in G$ und dass dieses y eindeutig, d.h.: $(x, y_1), (x, y_2) \in G \Longrightarrow y_1 = y_2$

Diese Entwicklung, so segensreich sie für die mathematische Theoriebildung war, birgt bis heute begriffliche Schwierigkeiten und kognitive Konflikte für Lernende in sich. Auch Tall (1997) betont dies und bezieht sich auf Studien von Sierpinska (1992) und Sfard (1990). Sie haben nachgewiesen, dass der eher operative Blick auf Funktionen (als Veränderungen einer Größe in Abhängigkeit von einer anderen) mit einem strukturellen Blick auf Funktionen (als Objekte und formale Definitionen) für Lernende oft nur schwer zu vereinen sind. Insbesondere birgt die mengentheoretische Definition viele Probleme für den Lernprozess mit sich, die als Relikt der „Neuen Mathematik" seit 1960 immer noch die Definition in den Schulbüchern beeinflusst. Diese Definitionen haben für Schülerinnen und Schüler oft wenig mit der Untersuchung von „Beziehung und Veränderung" und dadurch mit ihren Grundvorstellungen gemeinsam. So bestätigt zum Beispiel ein Forschungsergebnis von Vinner (1983) die tägliche Erfahrung vieler Lehrpersonen: Auch wenn Schülerinnen und Schüler die korrekte Definition einer Funktion nennen können, heißt dies noch lange nicht, dass sie den Funktionsbegriff wirklich durchdrungen haben oder gar korrekt anwenden können. Studierende, die die Definition korrekt wiedergeben konnten, haben zum Beispiel Graphen (fälschlicherweise) nicht als Funktionsgraphen erkannt, da „sie nicht mit einer einzigen Gleichung zu beschreiben sind". Tall (1997) verweist noch auf weitere Studien mit ähnlichen Ergebnissen.

Aus solchen Gründen fordern aktuell Mathematikdidaktiker, dass die grundlegende Idee einer Funktion, wie zum Beispiel Leibniz sie beschrieben hat, als fundamentale Idee der „Beziehung und Veränderung" zum Kanon des Mathematikunterrichts gehört ([Whitehead 1962], [Heymann 1996], [Tietze/Klika/Wolpers 1997]). „Fundamentale Ideen" sind dabei Aspekte, die sich wie rote Fäden (vgl. [Klika 2003], S.4) durch den schulischen Unterricht ziehen sollten. Daran können sich Lernende orientieren und erhalten damit ein Mittel zur Synopse verschiedener Themen über Jahrgänge hinweg. Fundamentale Ideen dienen neben der inhaltlichen Fachsystematik als zusätzliche vernetzende und verbindende Elemente. „Beziehung und Veränderung" als fundamentale Idee trifft in der didaktischen Fundierung des Funktionsbegriffs auf die verschiedenen Grundvorstellungen, die Malle (2000) in Anlehnung an Vom Hofe (1995) für den Funktionsbegriff festmacht. Er schlägt dabei in absteigender Rangfolge der Wichtigkeit die folgenden drei Grundvorstellungen für „Funktion" vor:

1. Zuordnungsvorstellung
2. Kovariationsvorstellung
3. Objektvorstellung

Malle (2000) betont insbesondere die ersten beiden Grundvorstellungen und spricht davon, dass ein Aspektwechsel zwischen beiden Grundvorstellungen für das Verstehen des Funktionsbegriffs unabdingbar ist. Insbesondere für das Untersuchen von Funktionen fordert er beide Aspekte Kovariation und Zuordnung:

> *Eine Funktion ähnelt einer Medaille. Nur wer beide Seiten kennt, kann Funktionen sinnvoll untersuchen.* ([Malle 2000], S.4)

Beim Aspekt der Kovariation wird das Änderungsverhalten betont, ist also mehr dynamisch zu sehen (z.B. „Wie verhält sich $f(x)$ bei wachsendem/ fallendem x?“) im Gegensatz zum Zuordnungsaspekt, der eher mit einem punktuell statischen Erfassen der Funktion verbunden ist, was sich zum Beispiel in der Frage ausdrückt: „Welches $f(x)$ gehört zu einem bestimmten x?“ Für den Unterricht besteht die Herausforderung, Schülerinnen und Schülern beide Aspekte so nahe zu bringen, dass sie bei Funktionsuntersuchungen flexibel genutzt werden können. Diesen Dualismus zwischen statischer und dynamischer Wesensart sehen Gray/Tall (1994) als originär für viele mathematische Begriffe und haben als Synthese zwischen „process“ und „ concept“ die Bezeichnung „procept“ eingeführt, um diese Dualität zum Ausdruck zu bringen. Tall (1997) nennt als Beispiele von „procepts“ neben Funktion auch Ableitung, Integral und Grenzwert.

Der zentrale Gedanke der Analysis, der auch eine neue Qualität für die Funktionsuntersuchung in der Oberstufe bringt, ist die Untersuchung und theoretische Beschreibung des Infinitesimalen – *análysis* (*gr.:* Auflösung, Zergliederung) also im doppelten Sinne des Wortes – als Analyse von Abhängigkeiten und als Zergliederung in immer kleiner Werdendes. Von diesem Spannungsfeld sollte und soll auch der Analysisunterricht der Schule geprägt sein – nicht nur Beobachtung und Beschreibung der realen Welt, sondern auch sensibel machen für die Notwendigkeiten und Details der mathematischen Theorie. Die Diskussion um die rechte Balance zwischen elementarer und fortgeschrittener Mathematik kumuliert in der Frage, wie die Idee des Grenzwertes als Kern der Infinitesimalrechnung vermittelt werden sollte, damit das Lernen von einem mathematischen Verständnis durchdrungen ist. Dabei lassen sich zwei extreme Positionen ausmachen. Das ist einmal die Position, die im formalen Zugang den Königsweg sieht (z.B. über eine Definition mit Hilfe von ϵ-δ-Umgebungen); die andere Position postuliert zunächst einen intuitiven Zugang als Grundlage des Verstehens. Dieser beschränkt sich auf ein informelles Verständnis des Grenzwertes von „immer-näher-kommen“. Beide Zugänge haben Vor- aber auch Nachteile. Mamona-Downs (1990) hat im Rahmen einer vergleichenden Studie an zwei Schulen (eine britische und eine griechische) die beiden Zugänge verglichen. Dabei konnte sie die Ergebnisse vorheriger Studien bestätigen. Der intuitive Zugang induziert bei den Lernenden einzelne Vorstellungen, die mit der formalen Definition nicht zu vereinen sind. Demgegenüber fördert der formale Zugang zwar den logischen Zugang, dafür aber in geringerem Maße konzeptuelles Verständnis.

Diese Problematik des fehlenden Zusammenklangs von formalem Vorgehen und intuitivem Verstehen besteht nicht nur in Bezug auf den zentralen Begriff der Analysis, den Grenzwert, sondern durchzieht die gesamte schulische Analysis. Besonders gilt das für die Funktionsuntersuchungen mit ihren vorgegebenen Kriterien und Algorithmen zur gezielten Analyse, der häufig sogenannten „Kurvendiskussion". Auch hier muss konstatiert werden, dass die Algorithmen als Routineprozeduren mehr rezeptartig formalistisch ohne Verstehen der dahinterliegenden Zusammenhänge angewendet werden. Auf diese einseitige Kalkülorientierung weisen Borneleit/Danckwerts/Henn/Weigand (2001) explizit in ihrer Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe hin und belegen dies mit entsprechenden Studien.

Die Bezeichnung „Kurvendiskussion" ist dabei für das Untersuchen von Funktionen zu eng und irreführend: Irreführend, da es eine Menge „Kurven" gibt, die nicht unmittelbar das Bild einer Funktion darstellen; zu eng, da die graphische Darstellung einen besonderen Schwerpunkt erhält, obwohl sie nur eine und nicht die einzige Art ist, eine Funktion darzustellen und zu beschreiben. Diese Fokussierung auf das Graphische passt jedoch zur tradierten und teils noch vorherrschenden Praxis, nach einer vorgegebenen Abfolge von Schritten die mathematischen Eigenschaften einer Funktion zu ermitteln mit dem alleinigen Ziel, den Graphen zur Funktion zu zeichnen. Es geht dabei wesentlich um das Meistern symbolischer Methoden zur Bestimmung markanter Stellen (Null- Extrem-, Wendestellen) wie das Herausfinden bestimmter Eigenschaften (Steigungsverhalten, Symmetrien, evtl. Krümmungsverhalten). Leider führt dieser Fokus dazu, dass Analysis von Lernenden eher als eine Ansammlung von Routinen als ein Wissenskanon angesehen wird, wie es E.E.Moise (1984) schreibt:

> *For the overwhelming majority of students, the calculus is not a body of knowledge, but a repertoire of imitative behaviour patterns.* (zitiert nach [Tall 1997], S.290)

Nimmt man das Wort „Funktionsuntersuchung" jedoch im wirklichen Sinne eines *Studiums der Abhängigkeiten der veränderlichen Größen* ernst, so braucht man als Fundament Kenntnis von Funktionen und Funktionsklassen mit ihren besonderen Merkmalen und die Fähigkeit, flexibel Besonderheiten und Muster zu erkennen und diese zu bestimmen. Dazu gehört auch das Wissen um die verschiedenen Darstellungsarten mit ihren Vor-und Nachteilen, um flexibel – je nach Situation und Frage – die besonderen Charakteristika herauszufiltern. Nur so können Lernende das Untersuchen von Funktionen als das lernen, was es nach Tietze/Klika/Wolpers (1997) wirklich sein sollte:

> *Es müssen Auffälligkeiten wahrgenommen, Zusammenhänge entwickelt und Methoden zu deren Überprüfung entwickelt werden.* ([Tietze/Klika/Wolpers 1997], S.47)

5.2.2 Umsetzung in der Lernwerkstatt

Die Schritte der klassischen „Kurvendiskussion“ sind dabei keineswegs obsolet, sondern stellen jeder für sich einen potenziell wichtigen Teil einer qualitativ gehaltvollen Untersuchung dar. Ziel muss es jedoch sein, dass diese Teile gezielt im Rahmen eines Kontextes oder Problems und nicht als mechanische Abfolge vollzogen werden. Es geht um einen souveränen Umgang mit den einzelnen Kriterien, der aber bedingt, dass die einzelnen Algorithmen verstanden und mit Leben gefüllt werden können. Dies ist Ziel der hier vorgestellten Lernwerkstatt, bei der die einzelnen Bausteine sich jeweils auf ein Kriterium von Funktionsuntersuchung beziehen. Dabei geht es einerseits um lokale Eigenschaften im Sinne markanter Funktionsstellen wie Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen und zum anderen um globale Eigenschaften wie Steigung (bzw. allgemein Änderung), Krümmung oder Symmetrie. Im Folgenden werden diese Eigenschaften vor dem Hintergrund der Festlegungen in den einzelnen Bausteinen erörtert.

Beim Verfahren zur Bestimmung von Extremstellen wird die Problematik der häufigen Unvereinbarkeit eines intuitiv-assoziativen Zugangs und eines formal-systematischen in besonderer Weise deutlich: Das Wort „extrem“ wird im normalen Sprachgebrauch häufig benutzt. Jeder verbindet damit eine Vorstellung – meist im Sinne übermäßig, absolut, riesig oder winzig und das sowohl bezogen auf reale Größen wie auch auf mentale Zustände. Die meisten Definitionen in den Lehrwerken knüpfen an diese allgemeinen Vorstellungen von „extrem“ an und sind inhaltlich-beschreibend. So findet sich zum Beispiel im Lehrwerk Lambacher-Schweizer die folgende topologische Definition, die mit den allgemeinen Vorstellungen leicht in Einklang zu bringen ist:

> ***Definition**: Die Funktion f sei auf einem Intervall I definiert.*
> *Der Funktionswert* $f(x_0)$ *heißt lokales Maximum von f, wenn es eine Umgebung* $U(x_0)$ *gibt, so dass für alle Werte* x *aus* $U(x_0) \cap I$ *gilt:*
> $f(x) \leq f(x_0)$
> *Der Funktionswert* $f(x_0)$ *heißt lokales Minimum von f, wenn es eine Umgebung* $U(x_0)$ *gibt, so dass für alle Werte* x *aus* $U(x_0) \cap I$ *gilt:*
> $f(x) \geq f(x_0)$ ([Baum u.a. 2000], S.136)

Danach wird dann der „Extremwert“ als Oberbegriff für Maximum und Minimum genannt. Konfliktträchtig wird es erst, wenn die in Deutschland häufig verwendeten Verfahren zur Bestimmung von Extrema ins Spiel kommen– vor allem, wenn die „hinreichenden“ Bedingungen nur unzureichend durchleuchtet werden und die Darbietung sich zu schnell auf die fachliche Systematik und die einfache Rezeptur beschränkt. In der Gefahr, dass Lernende etwas Unverstandenes blind übernehmen, steht vor allem das folgende hinreichende Kriterium zur Bestimmung von Extremstellen:

> ***Satz 2*** *(Zweite hinreichende Bedingung für innere Extremstellen über die zweite Ableitung f´´)*
> *Die Funktion f sei auf einem Intervall I zweimal differenzierbar.*
> *Gilt für eine innere Stelle x_0 von I $f‘(x_0) = 0$ und $f“(x_0) < 0$ dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 ein* ***lokales Maximum****.*
>
> *Gilt für eine innere Stelle x_0 von I $f‘(x_0) = 0$ und $f“(x_0) > 0$ dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 ein* ***lokales Minimum****.*
> ([Baum u.a. 2000], S. 141)

Mit der Konzeption des Bausteins E („Extremes“) (siehe Seite 27) soll dieses Konfliktpotenzial reduziert werden. Die Lernenden können die Problematik und Möglichkeiten bei der rechnerischen Bestimmung von Extremstellen mit eigenen Vorstellungen und Ideen verbinden und durchdringen. Aus diesem Grund werden die Schülerinnen und Schüler nach einem kurzen Verweis auf die außermathematische Bedeutung von Extremstellen aufgefordert, zu drei gegebenen Funktionen die lokalen Extremwerte zu bestimmen, ohne dass der Begriff „Extremwert“ oder „lokaler Extremwert“ näher beschrieben oder gar definiert wird. Ausgangspunkt sind also die individuellen Ideen und Konnotationen zum Begriff „extrem“. Dabei sind die drei Funktionen auf unterschiedliche Weise gegeben – eine als Graph, eine als Term und eine als Tabelle, um damit verschiedene Präferenzen von Schülerinnen und Schüler hinsichtlich der mathematischen Darstellungen anzusprechen. Zum anderen bietet sich durch dieses parallele Angebot die Chance, dass die Vorzüge und Nachteile der einzelnen Darstellungsarten reflektiert und verglichen werden. Durch das Andeuten von Tangenten im Graphen und die Aufforderung zur Beurteilung der Aussage *„Ist die Tangentensteigung 0, liegt ein lokales Extremum vor!“* wird das Nachdenken über den Zusammenhang zwischen Extrempunkten und Tangentsteigung bzw. Ableitung nahe gelegt. Darüber hinaus werden erste Schritte zur Formalisierung dadurch angeregt, dass ein rechnerisches Verfahren zur Bestimmung lokaler Extrempunkte zu entwickeln ist. Um keinem der verschiedenen Zugänge und Aufgaben Vorrang einzuräumen, wurde eine vorgegebene Erarbeitungsfolge bewusst vermieden und Aufgaben sowie Funktionen eher in Form einer „Mind map“ angeordnet (vgl. Seite 27).

Baustein E ist eng mit den Bausteinen L („Lange Leitungen“ für höhere Ableitungen) und K („Sanft krümmt sich..“) verbunden. Dies sind die zentralen Bausteine der Lernwerkstatt, denn hier geht es um die Erarbeitung der Zusammenhänge zwischen Funktionen und ihren Ableitungsfunktionen sowie um die Bestimmung markanter Punkte. Diese drei Themenschwerpunkte waren inhaltlich nicht disjunkt aufzuteilen. Die Aspekte der einzelnen der drei Bausteine sind zum Verständnis der jeweils anderen notwendig. Diese Zusammenschau wird bereits in der graphischen Übersicht zu den möglichen Wegen durch die Lernwerkstatt am Beginn des Schülermaterials (vgl. Seite 22) durch zyklische Anordnung und Pfeilverbindung der drei Bausteine angedeutet. Auch in den Bausteinen L und K wurde auf ein sequentielles Darbieten der Aufgaben verzichtet, um die Abfolge der Bearbeitung in den Händen der Schülerinnen und Schüler zu lassen. Die Anordnung der Aufgaben in einer „Mind map“ spiegelt auch stärker als eine hierarchische Abfolge die vernetzte Struktur der inhaltlichen Aspekte wieder. Die Vernetzung macht auch den Grundsatz der Konzeption deutlich, die Thematik als Ganzes darzubieten, um einen Überblick über das Potenzial und die Zusammenhänge der Einzelaspekte zu erhalten. Am deutlichsten wird dies in einer Aufgabe aus Baustein L. Dabei soll eine Tabelle gefüllt werden mit den Spalten „Grad der Funktion“, „Maximale Anzahl Nullstellen“, „Maximale Anzahl Extremstellen“ und „Maximale Anzahl Wendestellen“ (vgl. Seite 26). Auch die beiden Spiele sollen zu einer Vernetzung der Aspekte führen. Bei „Was gehört zusammen?“ (vgl. Seite 34) geht es darum, aus 13 Legeteilen mit jeweils einem Graphen Sets aus Graphen zu f, f´ und f´´ zu finden. Das Reiterspiel erfordert einen Spielplan mit einem Funktionsgraphen, auf dem mehrere Punkte markiert sind. Durch Würfeln mit einem eigens präparierten Würfel wird eine Eigenschaft bestimmt, zu der der nächstgelegene Punkt gefunden werden muss, der dieser Eigenschaft genügt (z.B. der nächste Punkte, für den gilt, dass f´´(x)=0).

Bei allen Bausteinen liegt der Hauptfokus auf ganzrationalen Funktionen, auch wenn eine Ausweitung auf alle Funktionen von der Sache her interessant und naheliegend gewesen wäre. Vor allem hätte eine solche Ausweitung die Gefahr einer zu engen Fokussierung vermeiden helfen. Die Gründe, die letztlich doch zu dieser Festlegung geführt haben, liegen zum einen darin, dass der Richtlinienbezug so deutlicher umgesetzt werden kann. ZUm anderen ist mit dieser Fokussierung auch eine größere Akzeptanz bei der Lehrerschaft zu erwarten. Deshalb wurde die traditionell übliche Begrenzung gewählt - vor allem, da auch davon auszugehen ist, dass die Ausweitung auf weitere Funktionsklassen auf der Grundlage der hier erarbeiteten Aspekte gut möglich ist.

5.3 Funktionsuntersuchung als kreatives und intellektuelles Handlungsfeld

5.3.1 Allgemeine Gedanken

Es ist keine neue Erkenntnis unserer Zeit, dass Mathematik nicht nur aus statischem Wissen besteht, sondern dass originär auch das Tun, das Mathematik treiben in vielfältiger Weise dazu gehört. Im Unterricht geht es also nicht nur um den Erwerb mathematischen Wissens, sondern auch darum, damit souverän und flexibel umgehen zu können. Vielleicht war und ist die Lehre nur zu statisch in die Enge gekommen und hat zu wenig von der Faszination und Weite des Mathematiktreibens vermittelt, so erscheint uns die Prozessorientierung in den Formulierungen von Kompetenzen und Bildungsstandards plötzlich als völlig neu. Hinter diesen neuen Pointierungen verbirgt sich jedoch nichts anderes als die Lupe auf das, was Winter (1995) als kreatives, intellektuelles Handeln bezeichnet, das den Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht eröffnet werden soll. Das Wertvolle an der Diskussion um Bildungsstandards und Kompetenzen, die als Ziele des Unterrichts formuliert werden, ist, dass das Wachsen und Werden von Mathematik neu in den Blickpunkt der Aufmerksamkeit gerückt wird. Altes Vergessene kommt neu in Erinnerung.

So allgemein - so gut, aber was heißt das konkret? Was heißt das für die konkrete Unterrichtssequenz und die Unterrichtsplanung? Das rationale Erwägen und Fordern allein bewirkt noch keine Veränderung des Unterrichtsstils im Alltag. Da gilt es zunächst zu klären: Was macht dieses kreative und intellektuelle Handlungsfeld im Mathematikunterricht konkret aus? Mit welchen Tätigkeiten können Kompetenzen eingeübt und erworben werden? Und darüber hinaus: Welcher dieser Tätigkeiten im Themenbereich Funktionsuntersuchung sind denkbar, sinnvoll und erst recht nützlich?

Als erste Orientierung dient das, was Tietze/Klika/Wolpers (1997) für den Themenbereich „Funktionsuntersuchung“ als mögliches Handlungsfeld für Schülerinnen und Schüler umreissen und als Kategorisierung anbieten. Sie unterscheiden zwischen zwei Komplexitätsebenen für mathematische Grundtätigkeiten und den zugehörigen Qualifikationen:

Obere Komplexitätsebene:

A1 Mathematisches Modellbilden, Mathematisieren, Anwenden

A2 Rationales Argumentieren, Begründen, Beweisen

A3 Kreatives Verhalten, Problemlösen, heuristisches Arbeiten

Untere Komplexitätsebene:

- *B1* *Analysieren, Synthetisieren*
- *B2* *Generalisieren, Spezialisieren, Abstrahieren, Konkretisieren, Klassifizieren*
- *B3* *Strukturieren, Analogisieren*
- *B4* *Repräsentieren: Enaktivieren, Ikonisieren, Verbalisieren, Formalisieren*
- *B5* *Übersicht verschaffendes Arbeiten, überschlägiges Denken, Anschauungsvermögen*

(vgl. [Tietze/Klika/Wolpers 1997], S.30)

Die obere Ebene beschreibt sehr allgemeine Tätigkeiten und Qualifikationen, die sich in vielfältiger Weise aus den Tätigkeiten der unteren Ebene zusammen setzen. Insgesamt beansprucht ein solcher Katalog nicht den Anspruch, eine disjunkte Einteilung zu liefern oder gar eine festgelegte Hierarchisierung von Tätigkeiten wider zu spiegeln. So kann ein „überschlägiges Denken“ bereits sehr viele kreative Elemente oder heuristische Strategien in sich bergen und ebenso kann ein „Anwenden“ ein Anwenden auf einer niedrigen wie auf einer hohen Komplexitätsstufe sein. Dennoch hilft eine solche Kategorisierung als Orientierungsraster bei der Konzeption einer Unterrichtssequenz. Sie regt an, Aufgabensammlungen immer wieder zu hinterfragen, inwieweit das Gesamtarrangement reichhaltige, vielfältige Anregungen beinhaltet oder nicht.

Für die konkrete Gestaltung von Aufgaben und Unterrichtskonzeptionen sind beide Ebenen noch zu abstrakt und bedarf es zusätzlich zur Hierarchisierung einer Kategorisierung nach Arten der kognitiven Tätigkeiten. Diese klingt zwar hier bei der Beschreibung innerhalb der beiden Ebenen an, lässt sich aber noch weiter für die Aufgabenkonstruktion konkretisieren, wenn man die Felder der Lernstrategien zu Grunde legt. Mielke (2001) versteht unter Lernstrategien alle diejenigen inneren und äußeren Verhaltensweisen, *mit denen verschiedene Aspekte des Lernens wie Motivation, Aufmerksamkeit, Informationsauswahl und -verarbeitung beeinflusst werden können* (S.177). Dazu gehören kognitive und metakognitive Strategien. Die kognitiven Strategien werden meist unterteilt in Wiederholen, Organisieren des Lernstoffs und Elaborieren als die drei wesentlichen Prozesse der Informationsverarbeitung. Diese Unterteilung geht ursprünglich auf Atkinson/Shiffrin (1968) zurück und wird in anderen Veröffentlichungen weiter spezifiziert, zum Beispiel konkretisiert Artelt (2000) das Organisieren unter anderem als Dekodieren, Strukturieren, Fragen generieren, Aktivieren und Anwenden von Regeln, Berichtigen. Lernpsychologische Erkenntnisse im Bereich der kognitiven Strategien wurden im Bereich der Mathematikdidaktik als Basis genutzt, daraus konkrete Folgerungen für den Unterricht zu ziehen. Hier ist zum Beispiel Heymann (1998) zu nennen mit der Forderung nach reichhaltigem Üben, Einbeziehen vielfältiger Eindrücke und integriertem Wiederholen.

Geht man von diesen beiden Grundlagen aus – Hierarchisierung nach Tietze/Klika/Wolpers (1997) einerseits und kognitiven Lernstrategien andererseits – lassen sich für den Themenbereich Funktionsuntersuchung die folgenden grundlegenden kognitiven Tätigkeiten spezifizieren:

- Tätigkeiten des Rezipierens
- Tätigkeiten des Darstellens
- Tätigkeiten des Analysierens
- Tätigkeiten des Reflektierens
- Tätigkeiten des Kreierens

Dabei wurde die Lernstrategie „Wiederholen" ausgeweitet auf diejenigen Tätigkeiten, die Vorgegebenes nutzen und zur Imitation oder einer vorgegebenen Anwendung (z.B. eine bestimmte Formel nutzen) anregen. Das Darstellen wurde wie bei Tietze/Klika/Wolpers (1997) als eigener Bereich gewählt, um der Bedeutung des Wechselns zwischen mathematischen Darstellungsarten als Strategie im Lösungsprozess gerecht zu werden und da das Darstellen und Transferieren in seiner Markanz nur ungenügend von anderen Bereichen beschrieben werden kann. Analysieren, Reflektieren und Kreieren tragen als Tätigkeiten sowohl organisatorische wie elaborierende Aspekte in sich. Als eigene Bereiche wurden sie mit der Absicht gewählt, die Blickrichtung und damit die Art und Weise der Informationsverarbeitung zu konturieren. Das Analysieren richtet den Blick hauptsächlich auf aktuell Gegebenes, das Reflektieren auf Vergangenes und das Kreieren ist bestimmt durch das Hervorbringen neuer Ideen und basiert auf kreativen Einfällen, hat also den höchsten Grad an eigener Gestaltungskraft.

Auch eine solche Einteilung kann keineswegs den Anspruch einer disjunkten Kategorisierung liefern. So lebt zum Beispiel ein Analysieren von einem reflektierenden und erinnernden Blick zurück und bleibt eine Analyse ohne kreative Einfälle oft oberflächlich und vordergründig. Dennoch ist eine solch detaillierte Sicht und ein Überblick über die verschiedenen Arten kognitiver Handlungen für die Konzeption und Evaluation von Lernprozessen sinnvoll.

Gerade für die Aufgabenkonstruktion ist sie notwendig, um gezielt die unterschiedlichen Fertigkeiten und Strategien anzuregen und zu fördern.

Tätigkeiten des Rezipierens Hier geht es um Tätigkeiten, bei denen es gilt, fremdes Gedankengut aufzunehmen und die dadurch vorgegebenen Wege zu beschreiten. Dazu gehören konvergente Aufgaben im Sinne von Blum/Wiegand (2000), bei denen der Lösungsweg und das Ergebnis eindeutig bestimmt oder vorgegeben sind. Berechnungen durchführen, gegebene Formeln anwenden oder ein vorgegebenes Verfahren ausführen gehören ebenso zu diesem Bereich wie das Nachvollziehen vorgegebener Gedanken. Viele traditionelle Aufgaben des Mathematikunterrichts – auch insbesondere die einzelnen Schritte der klassischen Kurvendiskussion – lassen sich hierunter subsumieren.

Tätigkeiten des Darstellens *„Das Repräsentieren ist eine beim Umgang mit Mathematik allgegenwärtige Tätigkeit und daher von außerordentlicher Wichtigkeit.“* schreiben Tietze/Klika/Wolpers (1997, S. 34) und unterscheiden dabei als Möglichkeiten des Repräsentierens in Anlehnung an Bruner (1974) das Enaktivieren, Ikonisieren, Verbalisieren und Formalisieren. Im Unterschied zu Bruner wurde das Verbalisieren aufgenommen. Eine ähnliche Katgeorisierung wie Tietze/Klika/Wolpers (1997) nutzen Hershkowitz/Kieran (2001) für ihre Aufgabenkonzeption im Bereich der Funktionenlehre. Sie nennen die algebraisch-symbolische, tabellarisch-numerische, graphisch-visuelle und die sprachlich-situative Darstellung, die sie plakativ und (auch für Schülerinnen und Schüler) einprägsam mit „Graph – Term – Tabelle – Wort“ ausdrücken. Die Auffassung vom didaktischen Wert, verschiedene Darstellungsarten mathematischer Objekte einzubeziehen, wird von vielen weiteren Didaktikern geteilt (z.B. [Tall 1997]). In den USA gibt es aufgrund dieser Überzeugung Schulbücher, die die „Rule of the three“ konzeptionell umsetzen. Gemeint ist dabei, dass bei sämtlichen Inhalten und Zugängen nicht nur der analytische, sondern auch der numerische und der graphische Zugang aufgenommen wird (z.B. „Calculus“ von [HughesHallett et al. 1998]).

Jede dieser Darstellungsarten hat je nach Fragestellung im inner- oder außermathematischen Kontext spezifische Vor- und Nachteile. So liefert ein Graph zwar einen schnellen, guten Überblick über den prinzipiellen Verlauf einer Funktion, gibt aber keine Detailinformationen etwa über Funktionswerte. Aus einer Tabelle lassen sich schnell eine Vielzahl von Funktionswerten ablesen, aber einen Überblick über die Eigenschaften des Funktionsverlaufs oder eine genauere Analyse sind nicht möglich. Die sprachliche Beschreibung einer Funktion bezieht sich entweder auf besondere einzelne Merkmale oder auf Aspekte eines eventuellen inner- oder außermathematischen Kontextes. Der Funktionsterm ist sicher die Darstellungsart einer Funktion, die am meisten Information in sich vereint. Bei einem Graphen lässt sich zwar eine erste qualitative Untersuchung durchführen, aber erst der Term erlaubt, dass sämtliche Werte berechnet, markante Punkte sicher bestimmt, Eigenschaften wie Symmetrien eindeutig erkannt und nicht zuletzt die anderen drei Darstellungsarten ermittelt werden können. Das Einbeziehen und parallele Erarbeiten der verschiedenen Darstellungsarten ist in zweierlei Hinsicht von Vorteil. Zum einen sind es lernpsychologische Erwägungen, nach denen anzuraten ist, verschiedene Repräsentationsmustern einzubeziehen, da verschiedene Personen je nach Lerntypus oder persönlicher Präferenz verschiedene Repräsentationsmuster bevorzugen. Zum anderen liefert das Neben- und Miteinander der Darstellungsarten ein flexibles und umfassendes Handwerkszeug, um Funktionen zu untersuchen. Insofern gehört die Tätigkeit des „Repräsentierens“ zu einer wichtigen Aktivität bei der Funktionsuntersuchung. Die Flexibilität des Wechselns zwischen den Darstellungsarten wird unterrichtlich am besten dadurch eingeführt, dass immer wieder Aufgaben bearbeitet werden, die den Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsarten erfordern. Viele traditionelle Aufgaben, die bei einem vorgegebenem Term die Berechnung bestimmter Werte verlangen, gehen vom Symbolisch-Algebraischen zum Numerisch-Tabellarischen. Ein klassischer mathematischer Beweis bleibt im Symbolisch-Algebraischen bzw. nutzt evtl. visuell-graphische Elemente. Eine Aufgabe, bei der zu einem Graphen ein Funktionsterm bestimmt werden soll, wechselt vom Graphisch-Visuellen zum Symbolisch-Algebraischen. Der Wechsel zwischen allen vier Darstellungsarten lässt sich bei der Thematik Funktionsuntersuchung konsequent durchdeklinieren und ergibt jeweils sinnvolle Aufgabenstellungen. Die Tabelle 5.2 macht dies deutlich.

Die Tabelle 5.2 zeigt, dass alleine dadurch, dass alle sinnvollen Möglichkeiten zwischen Darstellungsarten zu wechseln, einbezogen werden, eine große Aufgabenvielfalt erzeugt werden kann. In diesem Sinne liegt darin ein hilfreiches Instrumentarium bei der Aufgabenentwicklung. Gleichzeitig bringt man den Lernenden das Repräsentieren als Strategie näher, verschiedene Zugänge zu finden und die Thematik auf verschiedene Weise zu erschließen. Damit zeigt man ihnen Wege, Mathematik auf verschiedene Weise erfahrbar zu machen.

Tätigkeiten des Analysierens

Analysieren bedeutet immer zunächst ein Enkodieren von Vorgegebenem, es geht um ein Verstehen von Formeln, Texten, Tabellen oder Graphiken. Ist das Gegebene verstanden, folgt ein Interpretieren, ein Übertragen hinsichtlich bestimmter Fragen oder Kriterien. Diese Fragen und Kriterien sind entweder vorgegeben oder selbst gewählt. So ist zum Beispiel das Strukturieren von mehreren Termen eine Tätigkeit in diesem Bereich. Dabei müssen

	algebraisch-symbolisch	numerisch-tabellarisch	visuell-graphisch	sprachlich-situativ
algebraisch-symbolisch	Differenzieren, Integrieren, Beweisen	Funktionswerte berechnen	zu einem Term einen Graphen zeichnen	zu einem Term eine passende Situation benennen
numerisch- tabellarisch	zu x-,y-Tabelle einen passenden Term aufstellen	Zusammenhänge zwischen zwei Größen in einer x-y-Tabelle finden	aus einer x-y-Tabelle Punktkoordinaten ablesen und in ein Koordinatensystem einzeichnen	zu einer Tabelle eine passende Situation benennen
visuell- graphisch	Zu einem Graphen einen Term bestimmen	Werte aus einem Graphen ablesen	zum Grpphen von f´ einen möglichen Graphen von f skizzieren	zu einer Graphik eine passende Situation benennen
sprachlich-situativ	Aufstellen eines Terms als Modell eins Realkontextes	im Rahmen eines Realkontextes Beispielwerte berechnen	einen Kontext durch eine Graphik visualisieren	Umformulieren, in eigenen Worten erklären

Tabelle 5.2: Aufgabentypen zum Wechsel der Darstellungsarten beim Thema Funktionsuntersuchung

zunächst als Grundlage des Strukturierens die Merkmale der Terme gesehen und verstanden werden, aufgrund dessen Kriterien aufgestellt werden können. Tätigkeiten in diesem Bereich haben sowohl einen rezeptiven wie auch einen kreativen Anteil.

Tätigkeiten des Reflektierens
Mit Reflexion in der Pädagogik ist das Nachdenken über eine vergangene pädagogische Situation gemeint, die damit noch einmal von allen Seiten beleuchtet und untersucht wird, um sie besser zu verstehen und bewußt aus ihr zu lernen. Rückschau halten bedeutet also etwas Vollzogenes noch einmal gedanklich ablaufen zu lassen und neu zu durchdringen. Dies geschieht meist unter einer neuen Fragestellung oder veränderten Gesichtspunkten. Beispiele sind der Vergleich von verschiedenen Lösungswegen, der Vergleich von benutzten Darstellungsarten oder zum Beispiel ein bewusstes Verbinden verschiedener Erkenntnisse.

Tätigkeiten des Kreierens Die sicherlich anspruchsvollsten Aufgaben sind solche, bei denen es gilt, sich etwas Neues auszudenken – kreativ zu sein. Doch was heißt Kreativität beim Mathematik treiben und bei welchen Aufgaben ist Kreativität gefordert? Nimmt man zum Beispiel Problemlöseaufgaben oder Beweise, die nicht sofort einsichtig und zu bewältigen sind, dann ist es erforderlich, dass man neue Blickrichtungen auf die Aufgabe versucht und sich dabei eventuell vorhandenes Wissen vergegenwärtigt, um einer Lösung näher zu kommen. Diese Beweglichkeit im Denken ist gegeben, wenn man kreativ neue Wege einschlägt und nicht auf einem Weg verharrt. Interessant ist, dass genau solche Situationen für viele Mathematikerinnen und Mathematiker einen hohen Reiz ausüben. Es ist das Erleben, zunächst mit einem Problem nicht zu Rande zu kommen und erst nach längerem Hin und Her des Erkundens doch eine Lösungsidee entwickeln zu können. Eine solche Erfahrung macht stolz und motiviert zum Mathematik treiben. Schülerinnen und Schüler, die dies erleben, gewinnen so einen Zugang zur Mathematik - anderen bleibt jedoch eine solche Erfahrung versagt und komplexe Problemlöseaufgaben wirken eher frustrierend und entmutigend. Damit kann ein Teufelskreis beginnen, da man sich immer weniger solche Aufgaben zutraut. Deshalb ist es wichtig, dass das kreative Umgehen mit mathematischen Inhalten nicht nur an komplexen inner - oder außermathematischen Problemlöseaufgaben geübt wird, sondern dass die Beweglichkeit im Denken auch in einfacheren Kontexten angeregt werden kann. Um solche Aufgaben zu stellen, sollte man sich zunächst darüber im Klaren sein, welche speziellen Tätigkeiten ein Ausdenken von neuen Aspekten erfordert. Es muss geübt werden, neue Blickrichtungen einzunehmen, Beispiele selbst zu finden. Es sind Tätigkeiten, die ein Weiterführen erfordern, eine neue, nicht vorgegebene Sicht benötigen, die die Beweglichkeit im Denken auslösen. Dazu gehören zum Beispiel Aufgaben, bei denen Strukturkriterien selbst zu finden sind, bei denen in einer Fülle von Beispielen Muster erkannt werden müssen, nach denen es gilt zu ordnen, zu systematisieren und eventuell auf allgemeine Zusammenhänge zu schließen, zu generalisieren. Auch ein Recherchieren kann kreative Elemente beinhalten, wenn man selber Quellen suchen, eigene Wege beschreiten muss, um neues Wissen zu verstehen und gegebenenfalls mit vorhandenem zu verbinden. Weitere kreative Tätigkeiten sind auch das Ausdenken von passenden Beispielen und das Ziehen von Querverbindungen zu anderen Aspekten der Thematik.

Ein Großteil der traditionellen Aufgaben des Mathematikunterrichts lösen solche vielfältigen Tätigkeiten nicht aus, da sie darin verharren, vorgegebene Rechenwege oder Formeln zu nutzen. Grundsätzlich können diese Aktivitäten verstärkt werden, indem traditionelle Aufgaben für den Mathematikunterricht „geöffnet" werden. Öffnen der Aufgabe bedeutet dabei, die Freiheitsgrade einer Aufgabenstellung gegenüber einer klassischen konvergenten Aufgabe zu erhöhen. So ist zum Beispiel bei der innermathematischen Aufgabe

„Berechne die Ableitung mit Hilfe der Produktregel!“ sowohl das Ausgangsobjekt, der Weg als auch das Ergebnis eindeutig bestimmt. Blum/Wiegand (2000) nennen als prinzipielle Wege, eine konvergente Aufgabe in eine mehr divergente zu überführen, einen oder mehrere der drei Komponenten „Anfangszustand, „Transformation“ und „Zielzustand“ variabel zu gestalten. Für das Beispiel hieße das eine Umformulierung zu: „Leite nach der Produktregel ab. Wähle dazu passende Terme!“, wobei durch die Variabilität des Ausgangsobjekts sowohl Anfangs- als auch Zielzustand offen werden. Bei einer Veränderung zu „Leite auf verschiedenen Wegen ab und vergleiche“ werden bewusst alternative Wege einbezogen.

Bei jeglichem Öffnen mindestens einer dieser drei Komponenten verändert sich die zunächst eng vorgegebene Aufgabenstellung ins Kreative, da Schülerinnen und Schüler sich selbst Passendes ausdenken müssen. Auch bei sachbezogenen Problemstellungen greift diese Form des Öffnens. Geht es zum Beispiel um die Modellierung der Form eines Flugzeug-Tragflügels durch eine mathematische Funktion, so kann dieses Problem in verschiedenen Varianten gestellt werden. Bleibt es bei der lapidaren Aufforderung „Modelliere diese Form“ zusammen mit der Vorgabe eines entsprechenden Bildes, so sind hier im Sinne von Blum/Wiegand (2000) die beiden Komponenten „Transformation“ und „Zielzustand“ offen. Wird diese Aufgabenstellung jedoch durch weitere Informationen spezifiziert - zum Beispiel zu Maßangaben oder zum Typus der Funktion, so werden die Freiheitsgrade Weg und Ziel weiter eingeschränkt und damit auch die Tätigkeiten, die Schülerinnen und Schüler dabei vollziehen müssen. Deshalb wurde versucht, die Freiheitsgrade bei den Aufgabenstellungen innerhalb der Lernwerkstatt möglichst offen zu halten.

Kapitel 6

Theoretischer Hintergrund zum Medium: Möglichkeiten und Grenzen des Rechnereinsatzes im Analysis-Unterricht

Die hier untersuchte Lernwerkstatt wurde auf der Basis eines integrierten Rechnereinsatzes konzipiert, das erfordert, dass den Schülerinnen und Schülern ein Computeralgebrasystem oder zumindest ein Funktionenplotter zur Verfügung steht. Mit diesem Rechnereinsatz sind vielfältige Aspekte und Gedanken sowohl bei der Konzeption wie auch bei der Evaluation der Lernwerkstatt verbunden, die in diesem Kapitel erörtert werden sollen. In einem ersten kurzen Abschnitt wird zunächst geklärt, was unter Computeralgebra und Funktionenplotter zu verstehen ist (6.1). Daran schließt sich ein Überblick an über den Stand der Entwicklung des Einsatzes von Computeralgebra im Unterricht in den verschiedenen Ländern (Kapitel 6.2). Dieser Überblick ist wichtig, um die anschließenden Forschungsergebnisse einordnen zu können. Der Stand der Forschung im Bereich des Einsatzes von Computeralgebra im Unterricht ist gegliedert nach drei Fragen, die die internationale Arbeitsgruppe „Tools and Technologies“ bei ihrer Tagung 2005 (CERME 4, Spanien) als die grundlegenden Fragen im Zusammenhang mit Rechnereinsatz im Mathematikunterricht herausgestellt hat (vgl. [Drijvers/Barzel/Maschietto/Trouche 2006]) und die für diese Lernwerkstatt relevant sind:

- Was kennzeichnet **Computeralgebra** als Unterrichtsmedium in Mathematik? (Kapitel 6.3)

- Welche Bedeutung hat Computeralgebra für den **Lernprozess** der Schülerinnen und Schüler? (Kapitel 6.4)

- Wie sieht das **Lehren** beim Unterrichten mit Computeralgebra aus? (Kapitel 6.5)

6.1 Was man unter Computeralgebra versteht

Unter „Computeralgebra“ werden alle die Programme zusammengefasst, bei denen die Eingabe des mathematischen Objekts über einen mathematischen Term oder eine Gleichung erfolgt. Diese eingegebenen Objekte können weiter verarbeitet werden – berechnet bzw. graphisch dargestellt. Die verschiedenen Darstellungen werden entweder in einzelnen Fenstern – wie bei *Derive* im Algebra- und Grafikfenster – geöffnet oder im Rahmen einer word-ähnlichen Benutzeroberfläche als einzelne Objektfelder mit den mathematischen Darstellungen erzeugt (wie z.B. bei *MuPAD, Maple, TI-Interactive*). Kennzeichnend für ein Computeralgebrasystem sind folgende Funktionalitäten (in Anlehnung an [Heugl/Klinger/Lechner 1996]):

- Numerisch: Ein CAS weist Lösungen exakt aus, sofern nicht explizit eine Näherungslösung gefordert ist. So bleibt ein Ergebnis exakt stehen (z.B. $\sqrt{2}$) und wird nicht als Näherungswert ausgegeben.

- Symbolisch: Ein CAS löst Gleichungen und Gleichungssysteme nicht nur numerisch, sondern auch algebraisch.

- Graphisch: Ein CAS zeichnet Funktionsgraphen in verschiedenen Koordinatensystemen und Formen.

- Algorithmisch: In einem CAS sind einerseits Algorithmen implementiert (z.B. spezielle Funktionen, Prozeduren), und andererseits dient es als Plattform, neue Algorithmen zu entwickeln bzw. zu programmieren.

Bei einem Funktionenplotter dagegen beschränkt sich die Funktionalität alleine auf den grafischen Bereich. Funktionenplotter sind nicht nur als Computerprogramme verfügbar, sondern mittlerweile auch auf Taschenrechnern. Ein implementierter Funktionenplotter macht zum Beispiel einen wissenschaftlichen Taschenrechner zu einem sogenannten grafikfähigen Taschenrechner oder Grafikrechner (kurz GTR). Bezogen auf das Numerische bleibt jedoch ein solcher Taschenrechner approximativ und verfügt auch nicht über eine symbolisch-algebraische Verarbeitung. Allerdings sind die algorithmischen Eigenschaften prinzipiell vergleichbar, da man auch mit einem GTR Algorithmen programmieren kann und bereits eine Fülle vorgegebener Funktionen implementiert sind.

Auch ein Computeralgebrasystem ist heutzutage sowohl als Programm für Computer (z.B. *Derive, Maple, MuPAd, Mathematica, TI-Interactive*) als auch auf Taschenrechnern (oder allgemein auf „Handhelds") verfügbar. [1] Solche Taschenrechner werden dann als „Symbol-Taschenrechner", „CAS-Rechner" oder „Taschencomputer" bezeichnet werden (z.B. *V-200, TI-89, Classpad*).

Bei der hier untersuchten Lernwerkstatt war die Wahl des jeweiligen Programms oder Rechners den beteiligten Lehrpersonen entsprechend den Gegebenheiten an der Schule überlassen. Konkret wurden bei den beteiligten Kursen in diesem Projekt in erster Linie der *TI-92* (Vorgängermodell des V-200) und *TI-89* als „Taschencomputer" sowie das Computeralgebrasystem *Derive* auf Laptops oder fest installierten Computern eingesetzt.

6.2 Die Entwicklung des Einsatzes von CAS in den verschiedenen Ländern

Dem Technologieeinsatz im Unterricht wird eine hohe gesellschaftliche Bedeutung beigemessen. Dies lässt sich alleine daran erkennen, wie viel Geld für die Ausstattung der Schulen mit Computern seit dem Aufkommen des Computers als Unterrichtsmedium ausgegeben wurde. Jones/Lagrange (2004) nennen zum Beispiel Zahlen für Großbritannien, die auf Angaben des „British Educational Communications and Technology Agency" (BECTa) beruhen. Danach wurden für die Ausstattung der Schulen mit Computern zusammen mit entsprechender Fortbildung und curricularer Entwicklungsarbeit in der Zeit von 1998 bis 2004 insgesamt 2.65 Milliarden Euro in UK ausgegeben. Diesem hohen Investitionsaufwand entspricht nicht der wirkliche Grad der Nutzung dieser Technologien im Unterricht. Nach dieser Studie nutzen ca. die Hälfte (52%) der Grundschüler (primary school pupils) nie oder fast nie den Computer im Unterricht. Diese Zahl erhöht sich auf 67%, wenn man

[1] Der Begriff „Handheld" wird zunehmend mehr genutzt für solche Geräte, die von ihrer Größe her klein und wenig dominant sind. Dazu gehören ebenso Taschenrechner wie auch Palmtops (oder PDA - Personal Advanced Organizers), wobei bei beiden Arten die Funktionalität immer mehr in Richtung Computerausstattung wächst.

die Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I (lower secondary school, 11–14 Jahre alt) betrachtet und sogar auf 82% auf der Ebene der Sekundarstufe II (upper secondary school pupils, 14-16 Jahre alt). Ähnliche Zahlen sind auch für Deutschland anzunehmen, da laut BMBF (2005) die Relation Schülerinnen/Schüler pro Computer in den Sekundarschulen mittlerweile 12:1 beträgt. Nach Lagrange/Artigue/Laborde/Trouche (2003) beruht die Diskrepanz zwischen Ausstattung und tatsächlicher Nutzung darauf, dass immer noch große Uneinigkeit darüber herrscht, welche Kriterien darüber entscheiden, ob Technologie im Unterricht zu einer Bereicherung im Lernprozess wird oder nicht.

Zwei unterschiedliche Wege: Direkt CAS oder erst GTR? Bei der Suche nach diesen entscheidenden Einflussfaktoren des Rechnereinsatzes auf das Lernen hilft zunächst der Fokus auf das jeweilige Fach. Beim Blick auf den Mathematikunterricht muss konstatiert werden, dass im Vergleich zu anderen Fächern ein Spezifikum vorliegt, da die Inhalte und Konzepte viel stärker durch den Rechnereinsatz beeinflusst werden als in anderen Fächern. Zum einen sind durch Systeme wie Funktionenplotter und Computeralgebra klassische Aufgabenstellungen und Unterrichtskonzepte obsolet geworden (wie zum Beispiel die Kurvendiskussion in der Oberstufe). Zum anderen sind diese Programme schon lange (Funktionenplotter seit spätestens 1990; Computeralgebra seit 1995) auf Taschenrechnern verfügbar, und es liegt bereits eine Menge an Erfahrung in der Schulpraxis – teils auch wissenschaftlich begleitet – vor. Dabei ist die Entwicklung in den Ländern und der Forschungsstand sehr unterschiedlich. Tendenziell lassen sich zwei unterschiedliche Wege in Bezug auf den Einsatz von Computeralgebra ausmachen. Der eine führt vom wissenschaftlichen Taschenrechner zum GTR und von da aus zu CAS bzw. zu CAS-Rechnern, der andere Weg direkt vom wissenschaftlichen Taschenrechner zu CAS. In den meisten Ländern ist der erste Weg beschritten worden – dazu gehören USA, Australien und in Europa UK, Niederlande, alle skandinavischen Länder, fast alle südeuropäischen Länder und die neuen Bundesländer. Mit dem zweiten Weg – vom wissenschaftlichen Rechner direkt zum CAS – waren und sind Lehrpersonen in den meisten westdeutschen Bundesländern sowie in Österreich und Schweiz konfrontiert, da es in diesen Ländern kaum eine Tradition mit GTR gibt.

In den genannten Ländern des ersten Weges ist der GTR schon seit ungefähr 1990 fester Bestandteil in Theorie und Praxis des Mathematikunterrichts und es wird über CAS auf der Grundlage dieser Erfahrungen diskutiert. Dort gibt es mittlerweile auch eine Fülle von Studien zum Einsatz von GTR. Dies gilt auch für die ostdeutschen Bundesländer, wo es schon früh Schulversuche zum Einsatz grafikfähiger Taschenrechner gab. Dazu gehört zum Beispiel die Langzeitstudie in Sachsen-Anhalt von Hentschel/Pruzina (1995), die die Integration eines grafikfähigen Taschenrechners von Klasse 9 bis zum Abitur ab 1991 untersucht haben. Solche Studien über GTR dürfen bei einem Überblick über relevante Forschungsergebnisse zum Einsatz von CAS nicht fehlen, da die Grafikfähigkeit eine wichtige Funktionalität des CAS darstellt. Eine Fülle von veröffentlichten Unterrichtsbeispielen zum Einsatz von CAS nutzen alleine die Grafikfähigkeit des Systems aus, wären also prinzipiell auch mit GTR in ähnlicher Weise zu bearbeiten. Natürlich muss ein Überblick über Forschungsergebnisse zum CAS darüberhinaus noch Studien zu den weitergehenden Funktionen eines CAS gezielt einbeziehen.

Der erste Weg vom GTR zum CAS ist eher als evolutionäre, schrittweise Veränderung zu bezeichnen und verlangt von den Lehrpersonen nicht die plötzliche komplette Umstellung wie beim zweiten Weg. Wird die technische Grafikfähigkeit systematisch einbezogen, ist bereits ein wichtiger Schritt der Veränderung vollzogen. Klassische Aufgaben wie zum Beispiel die Kurvendiskussion werden überflüssig und müssen neu überdacht werden. Dieser Schritt ist für Lehrpersonen viel überschaubarer als der Weg direkt vom wissenschaftlichen Rechner zur vollen Kapazität eines CAS. Die Veränderung kann dann in zwei Stufen erfolgen – zunächst das Einbeziehen der Grafikfähigkeit und danach der algebraischen Funktionen wie der Möglichkeiten des Lösens von Gleichungen, des Ableitens und des Integrierens.

Der zweite Weg, direkt vom wissenschaftlichen Taschenrechner zum CAS, ist eher ein revolutionärer Schritt, der die beiden Stufen der Herausforderung für Lehrpersonen vereint und von daher auf einmal viel mehr an Veränderung abverlangt. Von diesem Schritt ist die Entwicklung in den meisten westdeutschen Bundesländern, in Österreich und in der Schweiz geprägt. Hier wurde seit 1990 der Einsatz von CAS (meist *Derive*) zunächst von einzelnen, später von immer mehr Lehrpersonen an den Schulen integriert. Der GTR kam dann später über den Umweg der Computeralgebra ins Gespräch, nachdem 1996 Computeralgebra auch auf Taschenrechnern implementiert verfügbar war [2]. Damit rückten neben Computern auch Taschenrechner insgesamt in den Fokus der Aufmerksamkeit. Dabei nahm man nicht nur die neue Gattung der Computeralgebra-Rechner (Taschencomputer) wahr, sondern auch die „bloß“ grafikfähigen Taschenrechner. Man erkannte, dass zwar die Möglichkeiten des GTR wegen der fehlenden symbolischen Verarbeitung algebraischer Ausdrücke gegenüber den Computeralgebra-Rechnern begrenzt ist, dass aber durch die Grafikfähigkeit bereits eine wichtige Funktionalität gegeben ist, den Lernprozess zu bereichern und schon alleine damit den zu starken Fokus auf

[2] Der TI-92 war 1996 das erste Gerät dieser Art

alleiniges Kalkültraining im Unterricht zu minimieren. In den letzten Jahren ist deshalb vereinzelt (besonders in Niedersachsen und Baden-Württemberg) eine Hinwendung zum GTR (oft jedoch nur als Vorstufe zum CAS-Rechner) zu beobachten vorwiegend wohl aufgrund pragmatischer Erwägungen der Bezahlbarkeit der Geräte.

Die Diskussion um die Frage der Ausstattung ist noch immer in vollem Gange. Es geht nicht nur um die Frage, ob lieber bzw. zunächst GTR oder lieber bzw. direkt CAS eingesetzt werden, sondern es geht auch um die Frage, ob Handheld oder PC-Ausstattung zu bevorzugen sind. Dabei ist die Diskussion oft von technischen Kriterien geprägt, zum Beispiel von der Frage nach der Schnelligkeit des Rechners und der höheren Auflösung der Bildschirmdarstellung. Natürlich müssen grundsätzliche technische Kriterien erfüllt sein und sollten die Programme bedienerfreundlich und leicht zu erlernen sein, Kriterien wie Schnelligkeit und Bildschirmauflösung müssen jedoch deutlich hinter didaktischen Kriterien wie ständige Verfügbarkeit zurücktreten. Das Bevorzugen der technisch optimalen, modernsten Lösung bringt zudem Probleme mit sich, die auch bedacht werden müssen. So gehört zum Beispiel die Möglichkeit des kabellosen Funkverkehrs bei modernen Laptops mittlerweile zur Standardausstattung, ist aber für die unterrichtliche Situation vor allem während Examina nicht unbedingt wünschenswert. Bedenklich ist auch, wenn der Wunsch nach der technisch perfekten Lösung dazu führt, dass man lieber auf das kommende Bessere wartet (z.B. flächendeckende Ausstattung mit Laptops) und dabei übersieht, was bereits mit den aktuellen bezahlbaren Geräten möglich ist. So werden weitertragende Veränderungen, die zum Beispiel durch das systematische Einbeziehen von Grafikfähigkeit durch GTR oder Taschencomputern möglich sind, nur unnötig aufgeschoben. Dieses Manko beschrieb Roger Brown, Vorsitzender des Internationalen Baccalaureat, New York, als er im Rahmen des 3.CAME-Symposiums [3] bedauerte, dass es immer noch „Länder wie Deutschland, Österreich und Schweiz gibt, die noch nicht einmal einen grafikfähigen Taschenrechner als Standard im Abitur haben.“

Zusammenwirken von Theorie und Praxis Die Forderung, dass didaktische Kriterien beim Technologieeinsatz entscheidend sein sollten, klingt einfach, ist es aber keineswegs. Wie bereits oben erwähnt, ist man sich im Rahmen der Mathematikdidaktik noch keineswegs einig und sicher darin, welche Faktoren zu einem erfolgreichen und sinnvollen Technologieeinsatz führen. Es gibt zwar eine Fülle von Einzelstudien, die den Einsatz von CAS

[3] 3. CAME-Symposium, Roanoke, USA, 19./20.10.2005

empfehlen, aber es fehlt die klare Leitlinie und eine grundsätzliche Konzeption für den Unterricht. Darin sehen auch Jones/Lagrange (2004) den Grund, dass die Verbreitung des Technologieeinsatzes sich nicht in dem Maße vollzogen hat, wie es die Einzelstudien hätten wünschenswert erscheinen lassen. Die Diskussion über eine sinnvolle Integration des Rechners in den Mathematikuniterricht ist national wie international in vollem Gange.

Dabei fällt auf, dass in der Diskussion wie in kaum einem anderen Bereich der Mathematikdidaktik international Theorie und Praxis in besonderer Weise miteinander verbunden sind. Dies lässt sich bereits an den Teilnehmerlisten einschlägiger Tagungen zu diesem Themenbereich erkennen. Der internationale Austausch fand und findet nicht – wie im wissenschaftlichen Bereich sonst üblich – allein auf der Ebene der Forschenden statt, sondern bezog und bezieht gezielt Lehrende aus der Praxis mit ein. Dieser Austausch war dabei stets von hoher gegenseitiger Wertschätzung, Akzeptanz und Kooperationsbereitschaft geprägt und ist noch heute in vielen Veröffentlichungen erkennbar, die eine Mischung darstellen aus überzeugenden Unterrichtsbeispielen und theoretischer Reflexion ([Weigand/Weth 2002]; [Hischer 2002]; [Heugl/Klinger/Lechner 1996]; [Hole 1998]; [Barzel/Hußmann/Leuders 2005]). Die enge Veflechtung von Theorie und Praxis im Bereich des Rechnereinsatzes mag daran liegen, dass die neuen Möglichkeiten, die ein solches System bietet, die Suche nach neuen Wegen auf beiden Seiten notwendig erscheinen lässt und man am gegenseitigen Austausch interessiert ist. Die enge Verflechtung liegt aber sicher auch an einem Phänomen, das am besten mit „spielerischer Faszination“ zu umschreiben ist. Der Spaß an der statischen und dynamischen Visualisierung mathematischer Objekte, die Idee, neue Themen für den Unterricht erreichbar zu machen und endlich auch realistische Daten im Unterricht verwenden zu können, beflügelt einzelne Lehrende an Schule wie Hochschule gleichermaßen. Hier trifft man sich und findet zusammen über das gemeinsame Interesse und den gemeinsamen Spaß, Mathematik auf neue Weise treiben und darstellen zu können. So ist zum Beispiel seit 1996 der *Derive Newsletter*[4] ein Forum zum Austausch solcher Ideen. In vielen dieser Veröffentlichungen ist der Geist der spielerischen Faszination bis heute spürbar.

Ein weiterer Grund, dass sich diese besondere Charakteristik des Zusammenwirkens von praktischen Erfahrungen und theoretischen Erwägungen auf internationaler Ebene gerade bei der Frage nach einem sinnvollen Einsatz von Computeralgebra im Mathematikunterricht herausbilden konnte, ist sicherlich, dass sich von Beginn an eine Kultur des Sponsoring herausbildete. Auf deren Grundlage wurde ein Austausch auch zwischen Praktikern über

[4] www.derive-europe.com/support.asp?dug

Landesgrenzen hinweg etabliert. Die Sponsoring-Projekte wurden ermöglicht durch die Initiative einzelner Personen aus verschiedenen Ländern, die teils aus der Wissenschaft (Frank Demana/ Bert Waits, University of Ohio, USA), aus behördlicher Verwaltung (Landesschulrat Helmut Heugl in Österreich) wie auch von Firmen (David Stoutemeyer, Bernhard Kutzler der Fa. Softwarehouse sowie Vertreter von Texas Instruments) kamen. Ziel dieser Projekte war es stets (ab 1986), eine enge Zusammenarbeit nicht nur zwischen Theorie und Praxis, sondern auch zwischen Produktentwicklung, Theorie und Praxis bei der Konzeption unterrichtstauglicher Software oder Rechner zu praktizieren. Von dieser Interdependenz zwischen Theorie und Praxis ist auch die Entwicklung des hier vorgestellten Forschungsprojektes getragen, dessen ursprüngliche Idee im Rahmen des Lehrerfortbildungsprojektes T^3 entstanden ist.

Das T^3-Projekt gibt es seit 1988 [5] – zunächst in USA, ab 1995 in Europa. Durch T^3 und durch gezielte Aktivitäten der Firma Softwarehouse (*Derive*) wurde die Teilnahme an Tagungen auf internationaler Ebene auch für schulische Lehrpersonen ermöglicht. Dazu gehören die Symposien zu *Derive* 1991 und 1992 in Krems, Österreich (vgl. [Böhm 1992], [Heugl/Kutzler 1994]) und die in der Folge entstandenen internationalen Tagungen zu Derive/TI-92. In deren Folge wurden einige Vereinigungen gegründet: ACDCA (Austrian Center for Didactics of Computer Algebra) und CAME (Computeralgebra in Mathematics Education) sowie der Zeitschrift IJTME (*International Journal for Technology in Mathematics Education*, vormals: *International Derive Journal*, später: *International Journal for Computeralgebra in Mathematics Education*[6]).

Auch Monoghan (2005) beschreibt dieses Zusammenwirken von Personen aus Schule und Hochschule in Fragen des Einsatzes von CAS und stellt als maßgebliche Länder Österreich, Frankreich, USA und UK heraus, die die Entwicklung im Weiteren vorangetrieben haben. Aufgrund von Erfahrungen im Unterricht war die übereinstimmende Annahme, dass Computeralgebra das Potenzial hat, den Unterricht von einer zu engen Kalkülorientierung zu befreien und einen weiteren Fokus im Unterricht zu ermöglichen, zum Beispiel

[5] T^3 steht für Teachers Teaching with Technology, einem Lehrerfortbildungsprojekt zu Fragen des Technologieeinsatzes im Mathematikunterricht in vielen Ländern, dem jeweils pro Land ein Sponsorvertrag zwischen Texas Instruments einerseits und einer Behörde, Universität oder Fortbildungsinstitut andererseits zu Grunde liegt. In Deutschland gibt es T^3 seit 1996 mit der Universität Münster als „host institute“.

[6] Die Namensänderung dieser Zeitschrift ist paradigmatisch für die Entwicklung der Forschung in diesem Bereich, die anfangs eher einzelne Produkte bzw. Produktarten fokussiert hat, sich dann aber ständig erweitert hat auf generelle didaktische Frage des Technologieeinsatzes.

auf Problemlöseprozesse (vgl. [Monoghan 2005]).

Bemerkenswert waren die Entwicklungen in den Ländern Österreich und Frankreich, da es in diesen beiden Ländern eine vereinende Struktur gab, die einzelne Studien zu einem Gesamten zusammen wachsen ließen. Vor allem gab es in beiden Ländern eine enge Kooperation zwischen Lehrern, Forschern und zuständigen Schulbehörden (z.B. Bildungsministerium) (vgl. [Heugl/Klinger/Lechner 1996]; [Hirlimann 1996]). In Österreich unterstützte das Research Institute for Symbolic Computation (RISC) der Universität Linz um Buchberger die Aktivitäten und es wurde ein enger Austausch zum Landesschulamt in Niederösterreich gepflegt. Man übernahm die didaktischen Prinzipien beim Rechnereinsatz, die Buchberger bereits vorher als „Whitebox - Blackbox - Prinzip“ und „Blackbox - Whitebox - Prinzip“ postuliert hatte (vgl. [Buchberger 1989], [Drijvers 1995], [Heugl/Klinger/Lechner 1996] und Kapitel 6.3) und erweiterte sie in späteren Projekten um das „Modul-Prinzip“ als zusätzlichem didaktischem Prinzip des Einsatzes von CAS im Unterricht[7]. In Frankreich warb das Ministerium eine Forschergruppe unter Leitung von Michèle Artigue an. Diese Forschergruppe sammelte zunächst die Fragen, Ängste und Ideen der beteiligten Lehrpersonen und nahm dies als Basis für Forschung bezüglich des aktuellen CAS-Einsatzes. Die Suche nach einem theoretischen Forschungsrahmen wurde von zwei Seiten beeinflusst: In den Werken von Vérillon/Rabardel (1995) mit ihrer Theorie des „ergonomischen Zugangs“ beim Medieneinsatz („ergonomic approach“ mit „instrumentation“ als zentralem Begriff) und andererseits vom anthropologischen Zugang Chevallards mit der Idee der „Praxeologien“ ([Chevallard 1999], vgl. Kapitel 6.3) beeinflusst.

In anderen Ländern gab es zwar punktuelle Einzelstudien, aber kein Zusammenwirken von Praxis, Theorie und Administration wie in Österreich oder Frankreich oder auf einschlägigen Tagungen. So gab es zum Beispiel in Deutschland Schulversuche und Modellprojekte in verschiedenen Bundesländern, die aber lediglich auf einer Kooperation zwischen Schulpraxis und Schulbehörde (meist über die Landesinstitute für Schule und Weiterbildung) beruhten. Diese Projekte bauten konzeptionell auf individuellen Erfahrungen einzelner Lehrpersonen auf und dienten in erster Linie der Entwicklung von exemplarischen Unterrichtsmaterialien für den Einsatz von CAS. Die meisten dieser Schulversuche beanspruchten weder von Seiten der Lehrpersonen noch von Seiten der beteiligten Behörden eine wissenschaftliche Begleitung und methodologische Absicherung. Dadurch blieb die Wirkung trotz interessanter Ergebnisse und teils hervorragender Unterrichtsmaterialien meist auf das jeweilige Bundesland beschränkt. Zu nennen sind hier exemplarisch:

[7] vgl. http://www.acdca.ac.at/projekt2/rechen/08.pdf

NRW ([MSWF 2001]), Niedersachsen ([NLI 2001]) und Baden-Württemberg (Pimokl-Projekt[8]). Aktuell zeichnet sich in dieser Hinsicht jedoch ein Wandel ab. Es gibt derzeit groß angelegte Projekte wie das BLK-Projekt SINUS/ SINUS-Transfer[9] bzw. regionale Projekte, die konzeptionell wissenschaftlich begleitet und fundiert werden.[10].

Insgesamt hat die Forschung im Bereich der Integration von Technologie in den Mathematikunterricht in den letzten Jahren enorm zugenommen und ist zu einem etablierten Bereich der mathematikdidaktischen Forschung geworden. Auf allen einschlägigen Tagungen gehört der Themenbereich seit spätestens Mitte der 90er Jahre zu einem festen Bestandteil – zum Beispiel auf den zentralen internationalen Tagungen ICME (International Conference on Mathematics Education) und PME (Psychology of Mathematics Education) oder speziell CAME (Computer Algebra in Mathematics Education), Cabriworld, ICT. Auch auf den Tagungen der ERME (European Society for Research in Mathematics Education) gehört die Arbeitsgruppe „Tools and Technologies“ von Beginn an (1998) als feste Größe dazu. Dabei werden immer stärker ganz unterschiedliche Arten von Werkzeugen einbezogen – grafikfähige Taschenrechner (GTR), unterschiedlichste Computerprogramme wie auch spezielle medial aufbereitete Lernumgebungen – und man sucht nach einem gemeinsamen Theorierahmen für Konzeption und Evaluation neuer Wege im Mathematikunterricht. Lagrange/Artigue/Laborde/Trouche (2003) haben eine Meta-Studie über den Einsatz digitaler Technologie im Unterricht vorgelegt. Damit wollen sie einen Grundstein legen für einen „multidimensionalen Theorie-Rahmen“, der die Sichtweise nicht nur auf einzelne Programme, sondern auf den Einfluss digitaler Medien für den Lern-und Lehrprozess im Mathematikunterricht insgesamt ausweitet. Diesem Öffnen liegt die Erfahrung zugrunde, dass es viele Einflüsse eines Rechnereinsatzes gibt, die unabhängig von einzelnen Programmen sind.

Diese Zusammenschau auf ganz unterschiedliche technologische Produkte gab es nicht von Anfang an. Zunächst wurden in Theorie und Praxis spezifische Produkt fokussiert (zum Beispiel: der *TI-92* in Frankreich; *Derive* und später *TI-92* in Österreich; *Maple* in Baden-Württemberg usw.). Heute werden verschiedene Produkte und Produktklassen zusammengefasst zu Programmtypen oder Genren (wie zum Beispiel Tabellenkalkulation, Computeralgebra und Dynamische Geometriesoftware). Diese werden als Konkretisierungen

[8] www.lehrer.uni-karlsruhe.de/z̃a122/mathe/mathepim1.html

[9] www.sinus-transfer.de

[10] Als exemplarisch kann hier die wissenschaftliche Begleitung solcher Studien zum Beispiel in Niedersachsen, Hessen oder Rheinland-Pfalz durch Prof. Dr. Regina Bruder, Technische Universität Darmstadt, gelten.

verschiedener mathematischer Repräsentations- und Zugangsweisen zusammengefasst und untersucht.

6.3 Was kennzeichnet Computeralgebra als Unterrichtsmedium in Mathematik?

Kriterien zur Klassifizierung und Beurteilung digitaler Medien im Mathematikunterricht Unter digitalen Medien im Mathematikunterricht lässt sich ein weites Spektrum fassen, das von allgemeinen Medien wie Präsentationssoftware über spezifische Mathematikprogramme bis hin zu eng geführten Lernumgebungen im Internet reicht. Besonders im Bereich eng geführter Lernumgebungen gibt es Angebote, die als programmierte Unterweisung zu bezeichnen und für den unterrichtlichen Einsatz abzulehnen sind. Aber wo liegt die Grenze, welche Medien für den unterrichtlichen Einsatz als sinnvoll zu erachten sind und welche nicht? Welche Kriterien muss ein Medium notwendig erfüllen, um als unterrichtstauglich zu gelten? Welche verschiedenen digitalen Medien gibt es, die für den Mathematikunterricht relevant sind und den Lernprozess sinnvoll unterstützen können? Solche Fragen stellen sich nicht nur einzelne Lehrpersonen bei der täglichen Unterrichtsplanung und waren auch bei der Planung der hier untersuchten Unterrichtssequenz von Bedeutung, sondern werden auch von Forschenden sehr divergent diskutiert und mit sehr unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen beantwortet. Das liegt an den Schwierigkeiten der Klassifizierung, die sich an ganz unterschiedlichen Kriterien orientiert. So wurden im Rahmen der Diskussion einer Forschergruppe verschiedene Möglichkeiten zur Strukturierung ([Drijvers/Barzel/Maschietto/Trouche 2006]) vorgeschlagen, darunter:

- Universell einsetzbar versus speziell einsetzbar
- Nutzer-Steuerung versus Medien-Steuerung
- Expressiv versus explorativ

Universell einsetzbar versus speziell einsetzbar Hierbei ist der Einsatzbereich des Mediums strukturgebend. Ist die Funktionalität des jeweiligen Mediums auf wenige Funktionen beschränkt oder universell in mehreren Bereichen einsetzbar? So ist zum Beispiel Computeralgebra ein universelles Medium. Man kann es für mehrere mathematische Bereiche (z.B. für Analysis wie für Lineare Algebra oder Stochastik) einsetzen. Genauso kann man es für verschiedene Aktionen benutzen (z.B. sowohl geeignet zum Berechnen, Lösen von Gleichungen wie Zeichnen von Graphen).

Häufig werden universelle Programme als Werkzeuge bezeichnet und dagegen andere, die mit einem klaren inhaltlichen Ziel verbunden sind, als Lernumgebungen:

> *Lernumgebungen (im weiten Sinne) sind im Grunde alles, was den Lernenden von außen instruiert. Dazu gehören Inhalte, Ziele, Kommunikationsformen u. a., die durch die Lehrperson oder die Lernenden vorstrukturiert bzw. festgelegt sind und die den Rahmen bieten für die Lernprozesse der Einzelnen oder der Gruppe. Werkzeuge sind dagegen (in Grenzen) universell einsetzbare Hilfsmittel zur Bearbeitung einer breiten Klasse von Problemen, wie etwa Textverarbeitungs- oder Computer-Algebra-Systeme.* ([Barzel/Hußmann/Leuders 2005], S.30)

Diese Kategorisierung erlaubt einen ersten Hinweis zur didaktischen Bewertung. Werkzeuge wie Computeralgebra, Tabellenkalkulation oder Geometriesoftware, die den Unterricht über mehrere Schuljahre begleiten, können eine nachhaltigere Bedeutung entfalten als punktuelle Lernumgebungen, deren Einsatz auf einzelne Unterrichtsstunden oder -sequenzen beschränkt ist. Dabei kommt es sehr darauf an, in welcher Weise der Rechner im Unterricht integriert wird. Steht Lernenden ein solches Werkzeug als reines Werkzeug ständig zur Verfügung, ist dies deutlich davon zu unterscheiden, wenn es nur hin und wieder und in präparierter Weise dargeboten wird. Wenn zum Beispiel die Lehrperson mit diesem Werkzeug ein mehr oder weniger eng geführtes Arbeitsblatt vorbereitet, dann wird der Rechner oder das Programm in dieser Situation zur Lernumgebung. Dies mag sinnvoll und gut sein, ist aber deutlich zu unterscheiden von den Veränderungen, die ein ständig verfügbares Werkzeug bedeutet. Werkzeuge in Reinform und ohne vorherige Gestaltung stehen nicht in der Gefahr, zur programmierten Unterweisung zu degradieren. Denn konzeptionell sind sie so angelegt, dass der Nutzer mathematische Objekte eingeben muss und selbst darüber entscheidet, welche Operationen mit diesen Objekten vollzogen werden sollen. Bedeutet die ständige Verfügbarkeit digitaler Werkzeuge, dass Lernende selbst entscheiden können, welches Werkzeug sie zu welchem Zweck wann und wie einsetzen, entwickeln sie einen eigenverantwortlichen Umgang damit und können sie in ihren jeweiligen Lernprozess passend integrieren. Dazu müssen sie aber die Werkzeuge in ihrer „Reinform“ und kompletten Funktionalität kennen lernen. Ein solcher Weg eröffnet Lernenden im Sinne von Baacke das Entwickeln von Medienkompetenz, die die vier Bereiche Medienkunde, Mediennutzung, Medienkritik und Mediengestaltung umfasst ([Baacke 1996]). Bezogen auf den Mathematikunterricht heißt das, dass Schülerinnen und Schüler mit den enstprechenden Werkzeuge nicht nur umgehen und sie nutzen können, sondern dass sie auch eine kritische Sicht entwickeln und die Medien passend zu eigenen Wegen und Vorlieben gestalten können. Kritische Sicht impliziert auch das Wissen um die besonderen Spezifika des einzelnen Mediums. Damit wächst die Fähigkeit zu entscheiden, wann welches Programm oder wann welche Funktionalität hilfreich ist. Deshalb haben digitale Werkzeuge wie Tabellenkalkulation, Computeralgebra und Geometriesoftware gegenüber Lernumgebungen aus didaktischer Sicht eine herausragende Bedeutung.

Nutzer-Steuerung versus Medien-Steuerung Dieses Kriterium zur Klassifizierung digitaler Medien bezieht sich auf die innere Struktur des Mediums in Abhängigkeit von den Intentionen und Zielen, die der Designer mit diesem Medium verbindet. Computeralgebra ist ein Medium, bei dem der Nutzer darüber entscheidet, was mit dem Programm vollzogen werden soll. Dagegen ist eine eng geführte Lernumgebung medien-gesteuert, da sie dem Nutzenden jeden Schritt der Handlung vorschreibt. In Drijvers/Barzel/Maschietto/Trouche (2006) wird das Ergebnis einer gemeinsamen Festlegung konstatiert, dass Unterrichtsmedien in erster Linie nutzer-gesteuert sein sollten, damit die Verantwortung für die am Rechner vollzogenen Handlungen im Rahmen des Lernprozesses in der Hand des Nutzenden bleibt.

Expressiv versus explorativ Hier sind die kognitiven Tätigkeiten strukturgebend. Ein Medium ist „expressiv“ (vgl. [Noss/Hoyles 1996]), wenn es als Mittel dient, die eigenen mathematischen Ideen auszudrücken. Dagegen wird ein Medium als „explorativ“ bezeichnet, wenn es eine Umgebung darstellt, um bestimmte mathematische Strukturen und Beziehungen zu erkunden. Zur Klassifizierung von Medien als reine Artefakte nutzt diese Klassifizierung sicher wenig. Viele Medien unterstützen sowohl exploratives Arbeiten wie auch expressives. Jedoch hilft die Unterscheidung bei der Untersuchung der Lernprozesse und der Schülertätigkeiten, die bei der Integration von Medien ablaufen und vor allem dabei, den Einfluss der Medien zu untersuchen. Zum anderen dient diese Ebene zur Bestätigung des Mediums Computeralgebra, da Computeralgebra zu den Medien gehört, die expressive wie auch explorative Tätigkeiten unterstützen.

Solche Kriterien dienen nicht nur der Klassifizierung sondern auch als Grundlage für die Beurteilung, ob ein Medium überhaupt als Unterrichtsmedien geeignet ist oder nicht. Neben der Benutzerfreundlichkeit und der Forderung, dass die Rechnersprache sich möglichst an der mathematischen Fachsprache orientieren sollte, um Irritationen und zusätzliche Konflikte für die Lernenden zu vermeiden, nennt die zitierte Autorengruppe in Drijvers u.a. (2006) als wichtigstes Kriterium:

> *As a first and important criterion for tools for mathematics education, it is pointed out that a tool should not take away responsibility from its users. A black-box like tool may not foster the critical attitude that is important in mathematics. However, powerful tools will inevitably confront students with features they do not know yet. We strive for black boxes to become transparent as much as possible and for tool use that has the character of student-machine interaction.*
> ([Drijvers/Barzel/Maschietto/Trouche 2006], S.9)

Mit diesem Kriterium ist eine klare Positionierung verbunden, dass zum Beispiel Medien der programmierten Unterweisung im Unterricht keinen Raum gewinnen sollten. Ein grundsätzliches Ablehnen jeglicher Lern- und Übesoftware ist damit nicht verbunden, sofern die Verantwortlichkeit des Nutzenden gesichert bleibt und das Gesamtarrangement des Unterrichts dem Lernenden genügend Wege für einen eigenständigen Lernprozess eröffnet. Für eine nähere Analyse digitaler Lernumgebungen sei auf Pallack (2003) verwiesen.

Aus den dargestellten Gründen wurde für die hier untersuchte Unterrichtssequenz die Entscheidung für die Integration von Computeralgebra getroffen. Im günstigsten Fall steht den Schülerinnen und Schülern die Computeralgebra nicht nur im Unterricht sondern auch zwischendurch und zu Hause zur Verfügung – ein Kriterium, das Handheldgeräte erfüllen. Solche Mini-Computer sind auch von ihrer äußeren Größe klein genug, dass sie auch alleine äußerlich nicht zu dominant werden können, sondern das bleiben, was sie sind – ein Werkzeug, das zwischendurch im Lernprozess genutzen werden kann.

Wozu dient Computeralgebra im Unterricht? Computeralgebra ist in dem Sinne expressiv, dass sie dazu genutzt werden kann, Mathematik auf die je eigene individuelle Weise auszudrücken. Das impliziert, dass die Art und Weise der Nutzung von Lernenden stark differieren kann. Dennoch lassen sich bestimmte Handlungen ausmachen, die ein CAS grundsätzlich auslösen kann bzw. die ein CAS grundsätzlich unterstützt. Dies wird in vielen Veröffentlichungen hervorgehoben. So sehen Tietze/Klika/Wolpers (1997, S.45) den Rechner als:

- *Medium* zur Darstellung, Demonstration und Veranschaulichung mathematischer Phänomene wie Kurven, Funktionen, Raumkurven, Flächen, Verteilungen;
- *Werkzeug* zur Einübung gewisser Techniken und Fertigkeiten, zur Unterstützung des Verständnisses mathematischer Verfahren und Begriffe und zur Verringerung des Rechenaufwandes bei Beispielen und des Aufwandes bei Termumformungen;
- *Tutor*, als Hilfsmittel für spezielle Lernprozesse;
- *Entdecker*, als Hilfe beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge im Sinne eines experimentellen Unterichts, beim Entwickeln und Überprüfen von Hypothesen.

Eine ähnliche Klassifizierung legt Hußmann (2002) seinen Studien zum Konstruktivistischen Lernen an Intentionalen Problemen zugrunde, reduziert sie letztlich auf die Unterscheidung zwischen Rechner als Tutor und Werkzeug. Mit dieser Festlegung klingt bereits die Klassifizierung in Werkzeug und Lernumgebung an (vgl. Seite 84). Hußmann sieht in engem Zusammenhang dazu die Unterscheidung zwischen „singulär“ und „regulär“, wobei er eine große Nähe zwischen singulärer Funktion und Werkzeugfunktion sieht: [11]

> *Der singuläre Aspekt betrifft die Lernende als Agens, so dass der Computer ihr zum Aufbereiten, Ordnen, Klassifizieren und Darstellen von singulärem Wissen dient, während die reguläre Perspektive die Präsentation und das Vermittlungsangebot von regulärem Wissen und Datenmaterial an die Lernende beinhaltet.* ([Hußmann 2002], S.30)

Hußmann sieht in dieser Unterscheidung die einzige Möglichkeit, eine disjunkte Einteilung der Computerfunktionalität zu erreichen:

[11] Dabei bezieht sich „singulär“ auf die individuellen Wege, Erfahrungen und Wissensnetze und „regulär“ auf das konsolidierte Fachwissen der Mathematik, wie es sich über Jahre hinweg entwickelt hat.

> *Eine disjunkte Einteilung der Computerfunktionen stellt erst die Disparität von singulärer und regulärer Funktion bereit.* ([Hußmann 2002], S.31)

Diese Unterscheidung fokussiert die Frage, welche Tätigkeiten an und mit dem Rechner vollzogen werden. Sind es Tätigkeiten im Dienst des eigenen Lernprozesses oder solche, die vom Regulären bestimmt sind und die es nachzuvollziehen gilt. Das Unterrichtsmaterial im Rahmen des hier vorgestellten MUKI-Projekts ist von eben diesem Spannungsfeld bestimmt – einerseits soll dem Lernenden genügend Freiraum gewährt werden, den eigenen Lernprozess zu gestalten und zu vollziehen. Andererseits geht es um das Lernen von Inhalten aus der Welt des Regulären. Insofern ist auch der Rechnereinsatz konzeptionell sowohl singulär wie regulär gedacht und das in fast allen Bausteinen. So ist zum Beispiel die Aufgabe, ein vorgegebenes Rechnerbild mit Hilfe von Funktionstermen auf dem eigenen Rechner zu erzeugen, eher dem Regulären zuzuordnen (z.B. in Baustein N, Seite 30). Eine Aufgabe wie in Baustein L (Seite 26), bei der Zusammenhänge zwischen den Graphen zu einer Funktion und deren Ableitungsfunktionen tabellarisch festgehalten werden sollen, ist dagegen eher vom Singulären bestimmt.

Für Konzeption und Evaluation des Materials im Rahmen von MUKI ist es hilfreich, die Aufteilungen der Rechnerfunktionen hinsichtlich der damit verbundenen kognitiven Tätigkeiten weiter zu spezifizieren. Eine Übersicht über die möglichen Handlungen in Verbindung mit dem Rechnereinsatz kann bei der Konzeption von Unterrichtsmaterial helfen, weitere Ideen zu generieren. Zugleich dient dies der Überprüfung, inwiefern eine Vielfalt bereits erreicht ist. Bereits bei Tietze/Klika/Wolpers (1997) klingen die mit den jeweiligen Rechnerfunktionen verknüpften Handlungen unmittelbar an - es geht um das Darstellen, Visualisieren, Rechnen, Entdecken und Überprüfen.

Ähnliche Handlungen wurden auch von Doerr/Zangor (2000) genannt. Im Rahmen ihrer interpretativen Studie haben sie aufgrund von Unterrichtsbeobachtungen die folgenden sechs Funktionen ausgemacht haben, die sie nicht als disjunkt, eher als überlappend bezeichnen. Danach wird der Rechner eingesetzt:

- zum Berechnen
- zum Transferieren (Wechseln der Darstellungsform)
- zur Datenerfassung
- zum Untersuchen und Entdecken

- zum Visualisieren
- zum Überprüfen

Auffallend in dieser Liste im Vergleich zu den vorher genannten Übersichten ist, dass hier der Aspekt des „Transferierens“ als eigene Funktionalität hervorgehoben wird. Das Transferieren von einer in eine andere Darstellungsform wird als ein Charakteristikum insbesondere von Computeralgebra gesehen, da neben der symbolischen Darstellung auch die numerisch-tabellarische und die grafisch-visuelle verfügbar sind. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit, Interdependenzen zwischen Term, Graph und Tabelle zum Beispiel hinsichtlich der Bedeutung von Parametern auf neue Weise zu untersuchen. Heugl/Klinger/Lechner (1996) haben dieses Charakteristikum von Computeralgebra unter dem Begriff „Window-Shuttle-Prinzip“ zusammengefasst. Auch die hier untersuchte Lernwerkstatt verfolgt das Ziel, dass Schülerinnen und Schüler Flexibilität im Umgang mit den verschiedenen Repräsentationen gewinnen können. Dazu sollen sie sowohl die Vor- als auch die Nachteile der einzelnen Repräsentationsformen erkunden und erkennen, um sie in einem nächsten Schritt gemäß der jeweiligen Aufgabe bzw. passend zum eigenen Lösungsweg wählen zu können.

Hischer (2002) und auch Hußmann (2002) nennen noch einen weiteren wichtigen Aspekt des Rechnereinsatzes, der hier seiner Bedeutung willen genannt wird, auch wenn er im Rahmen der Lernwerkstatt nur am Rande genutzt wird. Es ist der Gedanke, dass das Medium selbst (z.B. CAS) zum Objekt des Unterrichts werden kann, um zum Beispiel die Grenzen des Rechners verstehbar zu machen und daran exemplarisch mathematisches Verständnis zu schulen. Hischer nutzt die Grenzen des Rechners im Algebraischen wie im Grafischen didaktisch und wirkt damit auch der Gefahr einer blinden Rechnergläubigkeit entgegen (z.B. Aliaising-Effekte, wozu auch Lambert (2005) eine konkrete Unterrichtsreihe vorstellt).

In der hier vorgestellten Lernwerkstatt wurden bewusst Aufgaben einbezogen, den Rechner auf unterschiedliche Weise zu nutzen und durch gezielte Aufgabenstellungen vielfältige Handlungen anzuregen. Dabei boten die oben genannten Listen ein gutes Spektrum zur Orientierung. Einen Überblick über einige zentrale Aufgaben in den einzelnen Bausteinen in Bezug zur Rolle der Technologie gibt Tabelle 6.1.

Neben diesen bewusst angeregten Handlungen sind weitere im Zusammenhang mit dem Rechner denkbar. Dazu gehört zum Beispiel das Berechnen einzelner oder mehrerer Werte oder das Betrachten von Graphen, um weitere Schlüsse zu ziehen oder Ideen und Vermutungen zu überprüfen. Viele einzelne Aufgaben im Rahmen der Bausteine induzieren solche „informellen“ Handlungen am Rechner, ohne dass sie gezielt gefragt werden. So gibt es bei den einzelnen Bausteinen Übungsaufgaben (z.B. zur Bestimmung exponierter Punkte im Graphen), bei denen der Rechner in verschiedener Weise – je nach Art und Weise des individuellen Zugangs des Lernenden – zum Berechnen, Visualisieren und Überprüfen eingesetzt werden kann.

Aufgabe (Kurzfassung)	Baustein	Rolle des CAS
Aufgrund von frei zu generierenden Ableitungstermen auf eine allgemeine Regel schließen	W	Untersuchen/ Entdecken
Graphen von Bewegungsabläufen generieren und vorgebene Graphen durch einen aufgezeichneten Bewegungsablauf erzeugen	A	Daten erfassen; Untersuchen/ Entdecken
Zusammenhänge zwischen frei zu generierenden Graphen von Funktionen und ihren Ableitungen erkennen	L, K	Untersuchen/ Entdecken
Überprüfen eines selbst erzeugten Verfahrens zur Bestimmung von lokalen Extrema	E	Überprüfen
Graphen auf Symmetrie untersuchen und klassifizieren	S	Untersuchen/ Entdecken; Visualisieren
Untersuchung von Funktionen, die durch einen Term, durch einen Graph und durch eine Tabelle vorgegeben sind; Vergleich der drei Wege bzw. Darstellungsarten	G	Übertragen
Bestimmen von Funktionen an Hand von sachbezogenen Aufgaben	F	Berechnen; Visualisieren

Tabelle 6.1: Die Rolle des CAS bei den einzelnen Aufgaben

Eine Liste der Einsatzmöglichkeiten von CAS wie zum Beispiel die oben genannte nach Doerr/Zangor (2000) beschreibt in prägnanter Weise das Potenzial, das mit dem Einsatz von CAS verbunden ist. Insofern dient eine solche Liste nicht nur als ein Leitfaden bei der Aufgabenkonzeption eines Lernarrangements, sondern gleichzeitig als strukturgebend, um daran die Forschungsergebnisse entlang einer solchen Liste zu explizieren. Dies ist Inhalt des folgenden Kapitels.

6.4 Welche besondere Bedeutung hat Computeralgebra für den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler?

Wie bereits im Kapitel 6.2 ausgeführt, ist es ratsam, bei einem Überblick über relevante Studien zum Einsatz von CAS im Mathematikunterricht auch Studien zum GTR einzubeziehen, da die Grafikfähigkeit eine wichtige Komponente der CAS darstellt. Deshalb werden zunächst die wichtigsten Ergebnisse von Studien zu GTR dargestellt (Kapitel 6.4.1). Natürlich darf ein Überblick über CAS nicht auf dieser Stufe stehen bleiben, da durch die algebraische Funktionalität eines CAS die Komplexität gegenüber GTR wesentlich höher ist (Kapitel 6.4.2). Und gerade zu solch komplexen Systemen wie Computeralgebra mangelt es noch an Erkenntnissen, was wirklich im Lernprozess geschieht, wenn solche Systeme im Unterricht eingeführt und genutzt werden. In der Komplexität, die für Lehrpersonen oft unvorhergesehene Schwierigkeiten induziert, sehen Lagrange/Artigue/Laborde/Trouche (2003) auch die Ursache dafür, dass die Verbreitung von CAS im Unterricht trotz der vielen positiven Ergebnisse von Studien und trotz der immensen Hardware-Ausstattungen nur zögerlich vorangeht. Trotz der fehlenden Erkenntnisse im Umfassenden gibt es eine Fülle von Studien zu Einzelaspekten, auf die im Kapitel zu CAS (6.4.2) eingegangen wird.

6.4.1 Ergebnisse zum Einfluss von GTR auf das Lernen

Die Schnittmenge zwischen grafikfähigem Taschenrechner (GTR) und Computeralgebrasystem (CAS) besteht in erster Linie in der Möglichkeit, Graphen von Funktionen in verschiedenen Darstellungen und Koordinatensystemen zeichnen zu lassen – auch „Funktionenplot“ genannt. Dabei ist insbesondere die oft sehr pixelhafte Grafik in der Bildschirmdarstellung eines Taschenrechners kritisiert worden. Aber diese bereitet – bezogen auf einen Großteil der „gutartigen“ Funktionen aus der Schulmathematik – in der qualitativen Untersuchung im Lernprozess meist keine Probleme.

Nimmt man die einschlägige Literatur als Grundlage[12], so lassen sich eini-

[12] Dazu gehören neben den seit 1990 veröffentlichten Büchern auch Tagungsbände, Zeitschriften wie *ZDM*, *JMD*, *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *Journal for Research in Mathematics Education*, *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching* auch spezielle Berichte und Meta-Studien wie der Bericht über Forschung und Ergebnisse bzgl. Handheld-Technologien im Unterricht ([Burrill 2002]).

ge markante Ergebnisse des Einflusses der Technologie auf das Lernen herausstellen. Bei der folgenden Auflistung von Ergebnissen wurden nur solche Berichte von empirischen Studien einbezogen, die vor Veröffentlichung eine doppelte Begutachtung durchlaufen haben. Bei den einzelnen Studien wurden unterschiedliche Forschungsmethoden genutzt, es kommen sowohl qualitativ-interpretative Ansätze vor als auch quantitative. Die Auflistung der Ergebnisse folgt – soweit möglich – entlang der oben genannten Liste der Einsatzmöglichkeiten eines CAS nach Doerr/Zangor (2000). Dabei wird jedoch das Visualisieren unter „Wechsel der Darstellungsform" untergeordnet, da das Visualisieren den Transfer zur grafischen Repräsentation darstellt. Die „Datenerfassung" taucht nicht als expliziter Punkt auf, da keine Forschungsergebnisse dazu zur Verfügung standen und dies auch für diese Arbeit nicht relevant ist.

Durch den Einsatz von GTR können **realistische Daten stärker einbezogen** werden, da Berechnungen an den Rechner abgetreten werden können und so ein mehrmaliges Durchlaufen eines Modellierungskreislaufs denkbar ist. Durch die Schwerpunktverlagerung vom numerischen Rechnen auf das Interpretieren und Validieren beim Modellieren wird eine **kritische Reflexion von numerischen Lösungen** nahe gelegt. ([Drijvers/Doormann 1996])

Der GTR regt bei Schülerinnen und Schülern **explorative Tätigkeiten** an. Dies wird nicht nur als Erfahrung von vielen Praktikern formuliert, sondern findet sich auch als Ergebnis in verschiedenen Studien. Drijvers/Doormann (1996) haben dies aufgrund einer interpretativen Studie herausgestellt und Hentschel/Pruzina (1995) formulieren dies als ein zentrales Ergebnis ihrer Langzeitstudie, auf die weiter unten noch näher eingegangen wird.

Durch den Einsatz von GTR ist ein **schnelleres Überprüfen** von Rechnungen und Vermutungen im Numerischen und Grafischen möglich und Lernende erhalten in diesem Sinne ein **direktes Feedback** ihrer Überlegungen. Dies betonen Drijvers/Doormann (1996) und Hennessy/Fung/Scanlon (2001).

Das „Wechseln der Darstellungsform" ist sicherlich einer der markantesten didaktischen Aspekte, die mit dem Rechnereinsatz verbunden ist. Harskamp/Suhre/van Streun (1998 und 2000) sehen diesen Aspekt im Zusammenhang mit einem größeren Repertoire an Lösungsmethoden von Schülerinnen und Schülern. Aufgrund einer groß angelegten, vergleichenden Studie konstatieren sie, dass durch den Einsatz von GTR das Einbeziehen einer **Lösungsvielfalt und der Wechsel der Darstellungsarten** unterstützt wird.

Bei diesen Vergleichsstudien wurden die Lösungsstrategien von Schülerinnen und Schülern in 12 Analysis-Kursen über ein Jahr untersucht. Dabei wurden drei Gruppen untersucht: In der einen Gruppe stand kein GTR zur Verfügung, in der zweiten nur für eine Unterrichtseinheit (ca. 6 Wochen) und in der dritten Gruppe hatten die Schülerinnen und Schüler den GTR ständig zur Verfügung. Obwohl alle drei Gruppen in der gleichen Thematik mit dem gleichen Schulbuch unterrichtet wurden, wurden im Rahmen der Post-Tests Unterschiede zwischen den Schülerinnen und Schülern der verschiedenen Gruppen festgestellt. Die Zugänge der Schülerinnen und Schüler wurden unterschiedlichen Strategien zugeordnet: heuristisch, algorithmisch, grafisch, „unbekannt“. Man stellte bei den beiden Rechnergruppen fest, dass der grafische Zugang im Unterschied zur Kontrollgruppe häufiger verwendet wurde. Bei den beiden Rechnergruppen gab es darüber hinaus den Unterschied, dass die Schülerinnen und Schüler, denen ständig der Rechner zur Verfügung stand, darüber hinaus in viel stärkerem Maße heuristische Strategien mit einbezogen haben und die Lösungsvielfalt insgesamt größer war.

Die Verfügbarkeit des Rechners wurde auch in anderen Studien als wichtiges Kriterium genannt, was Kastberg/Leatham (2005) in ihrem Überblick über die Forschung im Bereich von GTR deutlich herausstellen. Dies betont auch Stern (1997) in ihrem Überblick über den allgemeinen Rechnereinsatz im Unterricht. Sie betont das Bedauern, wenn Repräsentationshilfen nur zur Demonstration im Frontalunterricht herangezogen werden. In der ständigen Verfügbarkeit von Rechnern sieht sie den Vorteil, dass die Lernenden selbst die Repräsentationsformen wählen können. Das Anwachsen der Flexibilität und der Vielfalt hinsichtlich der Lösungsstrategien konnten auch Drijvers/Doormann (1996) beobachten, und dies wurde auch durch eine Vergleichsstudie von Keller/Hirsch (1998) bestätigt. In Verbindung mit dem Präferieren des grafischen Zugangs kann auch das Ergebnis von Ruthven (1990) und Schwarz/Hershkowitz (1999) gesehen werden, die in Vergleichsstudien feststellten, dass durch den Einsatz des GTR Fähigkeiten einer guten Graphenerkennung und Graphenanalyse besser herausgebildet werden konnten.

Neben diesen Forschungsergebnissen im Zusammenhang mit den Einsatzmöglichkeiten des Rechners gibt es noch weitere für diese Arbeit relevante Aspekte:

Zu dem Ergebnis, dass schwache Schülerinnen und Schüler vom Rechnereinsatz profitieren, kommen Harskamp/Suhre/van Streun (1998) in der bereits genannten Studie. Sie beobachteten bei schwächeren Schülerinnen und Schülern größere Leistungszuwächse als in der Kontrollgruppe. Dies widerspricht der häufig genannten Befürchtung von Lehrpersonen, dass der Einsatz des GTR gerade für schwache Schülerinnen und Schüler eine Benachteiligung darstellt, da die Schwerpunktverschiebung von einer Kalkülorientierung zu mehr Modellieren und Problemlösen den Unterricht anspruchsvoller und von daher schwieriger macht. Die Forscher führen das Profitieren des Rechnereinsatzes für schwache Lernende auf das stärkere Einbeziehen und Betrachten von Graphen sowie das häufigere Einbeziehen von Anwendungsbezügen zurück.

Auch die Frage, ob es Unterschiede zwischen Jungen und Mädchen hinsichtlich des Rechnereinsatzes gibt, ist in einigen Studien untersucht worden. Hierbei sind allerdings sehr unterschiedliche Ergebnisse zu verzeichnen: So sind Forster/Mueller (2001) im Rahmen einer Großstudie in Australien zu dem Ergebnis gekommen, dass zwischen Jungen und Mädchen keine Unterschiede im Zusammenhang mit dem Einsatz grafikfähiger Taschenrechner zu verzeichnen sind. Hußmann (2002) kommt in seinen Studien zu dem Schluss, dass sowohl Jungen als auch Mädchen den Computereinsatz als positiv erfahren, jedoch zeigt der Abschlusstest, dass Mädchen deutlicher vom Computereinsatz profitieren. Jungwirth (1992; 1994) und Niederdrenk-Felgner (1993) betonen deutliche Gender-Unterschiede bezüglich des Computereinsatzes. Hier wäre eine genauere Analyse der weiteren Merkmale im untersuchten Unterricht und auch eine genauere Betrachtung der Methodologien der Studien notwendig, um ein klareres Bild zu erhalten. Dies würde aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Abschließend sei noch einmal der Blick auf die deutsche Langzeitstudie von Hentschel/Pruzina (1995) gelenkt, bei der ab 1991 die Integration eines grafikfähigen Taschenrechners von Klasse 9 bis zum Abitur untersucht wurde. In ihrem Abschlussbericht betonen die Forscher, dass sie aufgrund der Erfahrungen und Ergebnisse des Projektes die durchgehende Einbeziehung von Funktionenplottern in den Mathematikunterricht als realisierbar und empfehlenswert ansehen. Den Gewinn einer solchen Veränderung sehen sie in zwei Richtungen:

> 1. *Durch Einbeziehung grafischer Lösungsverfahren (vor allem beim Lösen von Gleichungen und bei Funktionsuntersuchungen) können die Möglichkeiten und Grenzen rechnerischer (direkter) Verfahren besser erkannt werden. Die Sicht auf Funktionen wird erweitert. Bei Anwendungen ist es möglich, den engen Rahmen einiger weniger Funktionenklassen bzw. Gleichungstypen zu überschreiten.*
>
> 2. *Entdeckendes Lernen bei der Behandlung von Funktionen wird durch mathematisches Experimentieren mit dem GTR sehr gefördert. Es besteht die Chance, planerisches Arbeiten (z.B. hinsichtlich Fallunterscheidungen), Aufstellen und Verwerfen von*

> *Vermutungen bis hin zur rechnerunabhängigen theoretischen Absicherung zu verstärken.* ([Hentschel/Pruzina 1995], S.232)

Zudem heben sie hervor, dass das vielfach befürchtete Vernachlässigen von Kalkültraining (z.B. Lösen quadratischer Gleichungen) nicht beobachtet werden konnte. Einen möglichen Grund dafür sehen sie in der besonderen Vorgehensweise, dass grafische und symbolische Verfahren stets miteinander verzahnt wurden (zum Beispiel beim Lösen von Gleichungen).

6.4.2 CAS-spezifische Ergebnisse

Trotz der großen Schnittmenge in der Funktionalität bei GTR und CAS und der in diesem Bereich vergleichbaren Forschungsergebnisse gibt es CAS-spezifische Aspekte, die einer eigenen Analyse bedürfen. Mit seinen algebraischen und exakt-numerischen Kapazitäten bietet ein CAS im Vergleich zu GTR ungleich reichhaltigere Funktionen. Damit verbunden sind auch immens höhere Anforderungen an die Unterrichtenden, denn mit dieser Reichhaltigkeit sind weite Bereiche der Schulmathematik betroffen, die weit über die Grafikfähigkeit eines GTR hinaus gehen. Im gesamten Bereich der Algebra – sowohl beim Einstieg in die Algebra als auch beim Anwenden, Vertiefen und Üben – kann Computeralgebra einen deutlichen Einfluss nehmen, denn bisher zentrale Anforderungen des Mathematikunterrichts wie das Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen werden in ein neues Licht gerückt. Das mathematische Ergebnis wird vom System geliefert und stellt damit eine einseitige Ergebnisorientierung im Unterricht stark in Frage. Lehrende sind dadurch gezwungen, unterrichtliche Grundsätze zu überdenken und neue Wege – zum Beispiel für das Erlernen von Algorithmen – zu finden. Das ist sowohl Chance als auch verständliche Bedrohung, da für viele Lehrpersonen damit Grundstrukturen und Grundsätze ihres Unterrichts in Frage gestellt sind. Hier unterstützend zu wirken, war auch Anliegen des MUKI-Projektes, weshalb die Forschungsergebnisse zu CAS in Konzeption und Evaluation in besonderer Weise im Rahmen dieses Projektes Beachtung gefunden haben.

Dass im Einsatz von CAS eine Chance liegt, längst überfällige Veränderungen im Mathematikunterricht anzugehen, lässt nicht nur der anfängliche Optimismus der Pioniere zu Beginn der 90er Jahre (vgl. [Böhm 1992], [Heugl/Kutzler 1994]) vermuten, sondern wird mittlerweile durch zahlreiche Studien nahe gelegt. So hat Tall (1997) nach Einbeziehen verschiedener Studien mit unterschiedlichen CAS festgehalten:

> *This gives clear indications that a „student plus manipulation tool“*

> *can be more successful in conceptual and computational tasks than a student working in a traditional manner.* ([Tall 1997], S.28)

Die folgenden Studien mit sehr unterschiedlichen Ansätzen und Methodologien sollen die Bandbreite der Forschungen in diesem Bereich verdeutlichen. Es gibt groß angelegte quantitative Vergleichsstudien, die anhand allgemeiner Anforderungen die Leistungen von CAS-Kursen mit Kursen vergleichen, die nicht mit CAS unterrichtet wurden. Eine solche Studie ist die von Hong/Toham/Kiernan (2001) in Neuseeland. Die Forscher arbeiteten mit zwei Vergleichsgruppen – die Experimentalgruppe wurde in Integralrechnung in vier einstündigen Kursen mit dem CAS-Rechner TI-92 unterrichtet, die Vergleichsgruppe nutzte bei gleichem Thema lediglich einen GTR. In einem Post-Test, der aus traditionellen Aufgaben des Universtitäts-Eingangstests bestand und bei dem alle Studierenden einen GTR benutzen konnten, schnitten die Studierenden der Experimentalgruppe deutlich besser ab. Die Studie nennt eine um 10% höhere Erfolgsquote. Zu einem ähnlichen Ergebnis bei vergleichbarer Methodologie kommen Connors/Snook (2001).

Drijvers (2003) hat im Rahmen einer interpretativen Studie (als Design Research) den Einfluss von CAS auf das Variablenverständnis von Schülerinnen und Schülern untersucht. Ergebnis dieser Studie ist, dass CAS zu einem vertieften Verständnis des Variablenbegriffs beiträgt. Schülerinnen haben durch den Einsatz von CAS die verschiedenen Bedeutungen der Variablen (wie zum Beispiel Variable als veränderliche Größe, Generalisierer, Unbekannte) kennengelernt und sind in der Lage, diese flexibler zu nutzen.

Auch Guin/Trouche (1998) haben in mehreren interpretativen Studien den Einfluss von CAS auf den Lernprozess untersucht. Sie berichten von einer Untersuchung in zwei Klassen, wobei vielfältige Materialien einbezogen wurden (Beobachtungen, Forschungsberichte der Schülerinnen und Schüler, Interviews, Fragebögen). Sie haben bei allen Lernenden eine Veränderung sowohl hinsichtlich der Einstellung zur Mathematik als auch im Selbstvertrauen festgestellt. Guin/Trouche unterscheiden aufgrund ihrer Studien zwischen zwei Schülertypen: Eher „theoretisch-rational orientierte“ Schülertypen gehen effizienter mit dem Gerät um und bewahren eine größere Objektivität und kritische Distanz zum Rechner als eher „mechanisch orientierte“ Schülertypen. Eine ähnliche Klassifizierung von Schülertypen nehmen auch Hershkowitz/Kieran (2001) vor und reden von mechanisch-algorithmisch orientierter versus bedeutungsorientierter Arbeitsweise.

Solche Klassifizierungen können sowohl Lehrpersonen als auch Lernenden selbst als Basis zur Reflektion des persönlichen Zugangs beim Rechnereinsatz dienen. Dabei sind jedoch Klassifizierungen hinsichtlich von Arbeitsweisen hilfreicher, da die Unterscheidung von „Schülertypen“ eher die Gefahr einer starren Einteilung und zu engen Zuweisung einzelner Personen zu „Typen“ in sich birgt. Den Schritt von der Klassifizierung von Schülertypen auf die Unterscheidung verschiedener Arbeitsweisen sind auch Guin/Trouche (2002) gegangen. Dabei konnten sie im Laufe ihrer Forschungsarbeit verschiedene Arbeitsstrategien ausmachen, die sie auch in mehreren Situationen bestätigen konnten. Die Autoren stellen fünf typische Arbeitsweisen beim Problemlösen mit CAS dar, die sie anhand der verschiedenen Lösungswege einer Aufgabe verdeutlichen. Die Aufgabe lautet: *Bestimme die n-te Ableitung zu* $f(x) = e^x\,(x^2 + x + 1)$. Zu dieser Aufgabe liefert das benutzte CAS (TI-92) keinen geschlossenen Term, so dass die Schülerinnen und Schüler gefordert sind, eigene Strategien zur Problemlösung zu entwickeln.

Guin/Trouche (2002) stellen aufgrund ihrer Studien fünf Arbeitsweisen heraus:

- **Theorie-geleitete Arbeitsweise:** Das Vorgehen ist mathematisch-systematisch und ist vielfach von Bezügen zu bereits Bekanntem geprägt. Es sind alleine Analogien und das Interpretieren der gegebenen Fakten, die die Arbeit leiten. Der Rechner wird lediglich am Ende zur Bestätigung genutzt.

- **Rationale Arbeitsweise:** Auch dieses Vorgehen ist hauptsächlich geprägt von rationalen Begründungen und Folgerungen. Jedoch wird hierbei der Rechner auch zur Ideenfindung eingesetzt – wenn auch nur wenig, Papier und Bleistift bleibt das bevorzugte Arbeitsmittel.

- **Zufallsorientierte Arbeitsweise**: Die Vorgehensweise ist geprägt von „Versuch und Irrtum“, von (vor-)schnell generalisierten Beobachtungen und von wenigen Bezügen zu Bekanntem. Es sind keine Strategien zu beobachten, die Rechnerergebnisse im Kontext zu validieren. So wird hier zum Beispiel bei einer falschen Eingabe des Ausdrucks trotz des Erscheinens von e^{x^2+x+1} auf dem Bildschirm die Fehleingabe nicht erkannt. Diese Arbeitsweise tritt sowohl beim Rechnereinsatz als auch beim traditionellen Arbeiten mit Papier und Bleistift auf.

- **Rechnergeleitete Arbeitsweise:** Die Hauptinformationsquelle ist der Rechner mit seinen Ergebnissen und Manipulationen. Papier und Bleistift werden fast nicht benutzt. Begründungen werden durch das Ansammeln von Beispielen mit Hilfe des Rechners gegeben – nach dem Motto: „Ich habe die Formel gefunden – das stimmt für alle n, ich habe es für viele ausprobiert!“ Mathematische Bezüge und korrekte logische Schlussfolgerungen werden eher vermieden.

- **Vielseitige Arbeitsweise:** Es werden ganz unterschiedliche Wege mit und ohne Rechner benutzt, um der Problemlösung näher zu kommen. Im Beispiel sind dies verschiedene Techniken, um den Lösungsterm zu finden: Faktorisieren, Erweitern, Beispiele für konkrete n betrachten und diese systematisieren (z.B. für kleine n betrachten und für große n), Vermuten, Verifizieren der Vermutung am Rechner, Generalisieren der Beobachtung als Basis für den Beweis.

Guin/Trouche wollen mit einer solchen Typisierung in erster Linie die Lehrpersonen auf mögliche, zu erwartende Schülerhandlungen vorbereiten und den oft eher ungewohnten Blick schärfen für die Ebene der unterschiedlichen Zugangs- und Arbeitsweisen. Das Wahrnehmen einer solchen Meta-Ebene kann nicht nur Lehrpersonen beim Einsatz eines komplexen Mediums Handlungssicherheit geben, sondern kann auch als Reflexionsgrundlage für die Lernenden dienen, über das eigene Arbeitsverhalten nachzudenken. Von daher sollten solche Typisierungen nicht als starre Raster gesehen werden, sondern als Orientierungsrahmen, die eigene Arbeitsweise wahrzunehmen und zu überdenken. So konnte Trouche zum Beispiel gemeinsam mit einzelnen Schülerinnen und Schülern deren Arbeitsweise von einer „rechnerorientierten“ zu einer „vielfältigen“ im oben beschriebenen Sinne entwickeln.

Mittlerweile liegt eine große Fülle an Studien zu digitalen Werkzeugen wie GTR, CAS oder DGS vor, die anfangs singulär waren und heutzutage eher unter einer gemeinsamen Fragestellungen betrachtet werden. Wie in anderen Bereichen der Mathematikdidaktik wird auch auf internationaler Ebene eine gemeinsame theoretische Grundlage des Rechnereinsatzes diskutiert. Ein solcher Theorierahmen sollte sowohl als Basis für die Konzeption und das Design wie auch für die Analyse von rechnergestützten Lehr- und Lernprozessen hilfreich sein. In der oben bereits erwähnten Meta-Studie über den Einsatz von digitaler Technologie im Unterricht ([Lagrange/Artigue/Laborde/Trouche 2003]) wird die Theorie des „instrumentalen Zugangs“ als eine solche theoretische Grundlage vorgeschlagen. Diese Theorie geht zurück auf die bereits erwähnten Aktivitäten der französischen CAS-Forscher-Gruppe um Artigue, Lagrange, Guin und Trouche (vgl. Kapitel 6.2). Basis der Theorie sind einerseits die konkreten Erfahrungen und Studien in Unterrichtsprojekten mit dem CAS-Rechner TI-92 (z.B. [Guin/Trouche 1998], [Guin/Trouche 2002]), andererseits die theoretische Grundlage mit der Idee des „ergonomischen Zugangs“[13] von Vérignon/Rabardel (1995).

[13] „ergonomic approach“: Hier ist „ergonomisch“ zu verstehen in Bezug auf handhabbare und komfortabel zu benutzende Produkte.

Kristallisationspunkt in der Theorie des „instrumentalen Zugangs“ ist der Akt der instrumentalen Genese („instrumental genesis“), wo der Schüler bzw. die Schülerin dem Medium als solches, dem „Artefakt“, begegnet (entweder dem Taschenrechner, dem Programm oder auch nur einer bestimmten Funktion des Rechners), dieses annimmt und in die eigenen Handlungen einbezieht. Dadurch wird das Artefakt für den eigenen Lernprozess genutzt, es wird zum „Instrument“. Diesen Prozess haben auch bereits Vérillon/Rabardel (1995) in dieser Notation beschrieben. Dieser Prozess ist von vielen Einflussfaktoren bestimmt: von den Grenzen und Potenzialen des Werkzeugs selbst, von der jeweiligen Aufgabenstellung, vom Vorwissen der Schülerinnen und Schüler und nicht zuletzt von den Arbeitssituationen im konkreten Unterricht. Das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler bezieht sich sowohl auf den Inhalt mit den jeweiligen Grundvorstellungen (vgl. [vom Hofe 1995]) als auch auf das Werkzeug mit der persönlichen Einstellung zum Werkzeug und der Art und Weise, wie man damit umgeht. Diese persönlichen Einstellungen werden unter dem Begriff „mentale Schemata“ zusammengefasst ([Drijvers/Trouche 2005]). Der Begriff „Schema“ geht dabei auf Piaget zurück und bezeichnet die handlungsbezogenen Aspekte des Denkens, kognitive Schemata bezeichnen die Denk- und Planungsmuster, die dem Handeln zugrunde liegen. Solche Schemata haben nach Trouche (2005) drei verschiedene Funktionen: eine pragmatische, da ein Schema spontane Handlungssicherheit vermittelt; eine heuristische, da das Schema ein Antizipieren und damit ein Planen der Handlungen erlaubt, und eine epistemische Funktion, da die kognitive Struktur der Schemata auch ein Verstehen ermöglicht.

Im Prozess der instrumentalen Genese werden zwei Aspekte näher beleuchtet. Es ist zum einen der Aspekt, dass das Artefakt mit seinen Möglichkeiten und Grenzen die Entwicklung von Techniken und Strategien der Problemlösung in Wechselwirkung mit dem eigenen mathematischen Vorwissen stark prägt („Instrumentation“). Andererseits gestaltet der oder die Nutzende aufgrund des eigenen Vorwissens gezielt das Artefakt und erweitert dabei gegebenenfalls dessen Möglichkeiten („Instrumentalisierung“), zum Beispiel durch Hinzufügen weiterer vordefinierter Funktionen. Drijvers/ Trouche (2005) weisen darauf hin, dass diese beiden – oft als Gegenrichtungen interpretierten Tendenzen – nicht oberflächlich auf allein äußere Techniken und Syntax reduziert werden dürfen. Vielmehr sind hierbei auch die auf unterschiedlichen Ebenen wirkenden mentalen Schemata mit einzubeziehen, vor allem solche, die hinsichtlich der inhaltlichen Anforderungen aufgebaut werden.

Aspekte der Theorie des instrumentalen Zugangs finden sich auch bei Noss/Hoyles (1996). Mit den Begriffen „shaping“ und „re-shaping“ beschreiben sie den gegenläufigen Einfluss des Rechners besser in dem Sinne, dass das Artefakt das Denken des Nutzers bestimmt und andererseits das Denken sich durch Nutzen der Technologie verändert.

Eine Berücksichtigung der unterschiedlichen instrumentalen Genesen der einzelnen Lernenden erfordert von der Lehrperson eine besondere Organisation von Raum, Zeit und Art der unterrichtlichen Arbeit. Guin/Trouche (2002) sprechen dabei von der instrumentalen Orchestrierung („instrumental orchestration“). Sie zeigen auf, wie eine solche Vorstellung eine bessere Definition der Ziele, der Strukturen und der Umsetzungsformen verschiedener Anordnungen ermöglicht, die darauf abzielen, für jeden Lernenden kohärente Systeme von Instrumenten zu schaffen. Noss/Hoyles (1996) sprechen in diesem Zusammenhang nicht von Orchestrierung, sondern von „webbing“ und stellen damit eher den vernetzenden als den frontalen Charakter der Klassenraumstruktur in den Vordergrund.

Im Rahmen der hier vorgestellten Studie ist der ergonomische Zugang nur am Rande von Bedeutung. Denn es steht nicht die unmittelbare Interaktion zwischen dem Einzelnen und dem Rechner im Vordergrund. Hier wird vielmehr das Zusammenwirken von Aufgabe, Situation und Rechner als Komplex wahrgenommen und untersucht. Ein solcher Zugang kann nach Lagrange (2005) eher mit Hilfe des anthropologischen Zugangs Chevallards reflektiert werden. In dessen Mittelpunkt stehen sogenannte „Praxeologien“ als die Trias „tasks, techniques, theories“ (Aufgaben, Techniken, Theorien). Dabei sind „Techniken“ als Bindeglied zwischen den gestellten Aufgaben und der Theoriebildung anzusehen ([Artigue 2002]; [Lagrange 2005]). Sie sind nicht nur Routinen zur Bewältigung von Kalkülen und Algorithmen, sondern Strategien, die mathematischen Objekte und Zusammenhänge zu verstehen. Sie haben demnach sowohl einen pragmatischen als auch einen epistemischen Wert. Technologien (wie CAS) wirken nach Artigue und Lagrange unmittelbar auf solche Techniken ein. Sie machen alte Techniken (wie zum Beispiel bestimmte Routinen) obsolet, ermöglichen aber auch neue (wie zum Beispiel Überprüfen und Strukturieren).

Monoghan (2005) sieht den instrumentalen und den anthropologischen Zugang nicht als Gegensätze sondern als zwei wichtige Beiträge zur Erforschung von Design und Unterricht. Er schlägt eine Verknüpfung vor, einen „holistic approach“, um eine Theoriebasis für zukünftige Unterricht-Designs mit integriertem CAS und deren Erforschung zu schaffen.

6.5 Wie sieht das Lehren beim Unterrichten mit Computeralgebra aus?

Die Faszination „Computer im Mathematikunterricht“, die Ende der 80er Jahre mit dem Computeralgebrasystem Derive bzw. dessen Vorgängern ihren Anfang nahm, war weniger von dem Wunsch und dem Ziel geprägt, den Lernprozess in die Selbstverantwortung der Schüler zu legen, sondern mehr von der Anziehungskraft der neuen technischen Möglichkeiten. Visualisierungen, komplexe Rechenfertigkeiten und vor allem die symbolischen Manipulationen konnten plötzlich in schneller und effizienter Weise vollzogen und in den Unterricht aufgenommen werden. Betrachtet man zum Beispiel die Tagungsbände der Derive- bzw. TI-92-Tagungen in Deutschland und Österreich aus den Jahren 1991 bis 2000, so gehören über zwei Drittel der Tagungsbeiträge in diese Kategorie. Darin kommen stoffdidaktisch geprägte Grundhaltungen und Überzeugungen zum Ausdruck, denen die Auseinandersetzung mit geeigneten Unterrichtsformen, Methoden, Organisationsarten eher fremd ist. Dies wurde auch im Rahmen einer Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ der GDM konstatiert, dazu Tschacher:

> *Häufig werden lediglich (neue) Inhalte vorgestellt und dabei erörtert, welche Rolle der grafische Taschenrechner oder das Computeralgebrasystem übernimmt; vom konkreten Unterrichtsablauf und dem Lehrerverhalten dagegen ist kaum die Rede. Unter dem Stichwort „methodische Freiheit“ wird den Lehrenden die Lizenz erteilt, in den alten Sünden zu verharren.* ([Tschacher 2000], S.167)

Doch daneben gab es schon früh und aktuell immer mehr Lehrpersonen wie Forscher, die aufgrund persönlicher Erfahrungen wie auch Forschungsergebnisse das Zusammenwirken von schülerzentrierten Arbeitsformen und CAS-Einsatz als besonders effizient herausgestellt und in vielen Veröffentlichungen betont haben. So stellt Schmidt fest:

> *Der sinn- und ertragreiche Computereinsatz im Mathematikunterricht verlangt weniger eine inhaltliche Veränderung des Lehrplans als vielmehr veränderte oder erweiterte Formen von Lehr- und Lernaktivitäten im Unterricht!* ([Schmidt 1988], S.17)

Nocker nennt aufgrund einer Untersuchung im Rahmen des österreichischen Projekts zum Computereinsatz im Mathematikunterricht:

> *Der bisherige Computeralgebraeinsatz ohne begleitende Maßnahmen ändert nur wenige, aber durchaus nicht unwichtige Elemente der*

> *Unterrichtsstruktur, er führt zu mehr selbstständiger produktiver Schülertätigkeit.* ([Nocker 1996], S.325)

Auch Weigand/Weth (2002) sehen im Computer einen möglichen Katalysator einer neuen Unterrichtskultur und Hole (1998) widmet dem Zusammenhang von neuen Lernformen und neuen Medien in seiner Didaktik zum Computereinsatz im Mathematikunterricht ebenfalls breiten Raum. Keller/Russell/Thompson (1999) berichten von den Ergebnissen einer Großstudie, bei der 687 Schülerinnen und Schüler in Analysis-Kursen beteiligt waren. Sie haben untersucht, welchen Effekt der Einsatz des TI-92 im Zusammenhang mit der Art und Weise der Vermittlung auf den Lernerfolg der Schüler hat. Dabei wurden zwei Gruppen mit jeweils zehn Kursen miteinander verglichen. In der einen Gruppe wurden kooperative Lernformen, Experimente und eine Vielfalt verschiedener Diskussionsformen genutzt. Die Kurse in der anderen Gruppe folgten tradierten, frontal fragend-entwickelnden Methoden. Es wurden Pre- und Post-Test einbezogen, hier die beiden wesentlichen Ergebnisse:

1. Die Lernenden, die einen TI-92 benutzt haben, haben im Abschlussexamen deutlich besser abgeschnitten als diejenigen, die keinen Rechner nutzten.

2. Schülerzentriertes Arbeiten hatte einen positiven Gesamteffekt auf den Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler insgesamt.

Auch Tall nennt ähnliche Ergebnisse ([Tall 1997], S.29)) und dabei konkret die Dissertation von Costin (1994), in der ebenfalls der Zusammenhang zwischen kooperativem Lernen und Technologieeinsatz untersucht wurde. Coston untersuchte vier verschiedene Gruppen parallel: die Kontrollgruppe mit klassischem Vorgehen ohne Rechner, eine Klasse mit traditioneller Vorgehensweise mit Rechner (TI-81, ein GTR), eine Klasse, die nach vorgegebenen kooperativen Lernformen unterrichtet wurde[14] und eine Klasse, die sowohl den Rechner einsetzte als auch kooperative Lernformen im Unterricht nutzte. Die Ergebnisse zeigen, dass schon allein das kooperative Lernen zu einer deutlich besseren Kompetenz im Problemlösen führt. Der Rechnereinsatz allein bewirkt für das Verstehen der erarbeiteten Inhalte keine signifikanten Unterschiede zur Vergleichsgruppe. Das Zusammenspiel von kooperativen Lernformen und Technologieeinsatz bringt deutliche Verbesserungen in der Einstellung der Schülerinnen und Schüler zur Mathematik.

[14] Dabei kamen „Johnsons and Johnsons´s Learning Together model“ und „Slavin´s Jigsaw II model“ zum Einsatz

Es mag sein, dass positive Effekte von Rechnereinsatz und Unterrichtsveränderung sich einfach addieren. Die Frage ist jedoch: Gibt es einen inneren Zusammenhang zwischen Rechnereinsatz und Unterrichtsöffnung? Bedingt der Rechnereinsatz, dass sich die Unterrichtskultur im Ganzen ändert? Bei der Erörterung dieser Fragen helfen zwei Aspekte, die sich in den beiden folgenden Thesen pointieren lassen:

1. Der Einsatz von CAS führt zu einer Öffnung der Aufgaben.
2. Der Einsatz von CAS führt zu einer Veränderung der Unterrichtsorganisation in Richtung schülerzentrierter Aktionsformen und Arbeitsweisen.

Mögliche Gründe für diese Thesen werden im Folgenden ausgeführt.

Veränderung von Aufgaben beim Rechnereinsatz

Gewährt eine Lehrperson ihren Schülerinnen und Schülern das Arbeiten mit einem Rechner, wird die Vielfalt der Lösungen alleine durch unterschiedliche Rechnereinstellungen und die Arten und Weisen wie der Rechner genutzt wird größer. So können die Grafiken unterschiedlich aussehen wegen verschiedener Bildschirmeinstellungen oder werden unterschiedliche Befehle und Vereinfachungen benutzt. Diese Unterschiede sind nicht unbedingt Zufall, sondern mit unterschiedlichen Lösungswegen und -ideen – also auch individuellen Denkweisen – verknüpft. Der Rechner macht diese unterschiedlichen Denkweisen für Lehrende und Lernende transparent und lässt damit leichter zu Tage treten, dass es notwendig ist, die traditionelle eindimensionale Lösungsorientierung zu verändern.

Viele Standardaufgaben des Mathematikunterrichts sind konvergente Aufgaben, die auf ein bestimmtes Ergebnis hinzielen - dazu gehören insbesondere Kalkülaufgaben mit den folgenden Aufgabenformaten: löse diese Gleichung, forme diesen Term um, wende dieses Verfahren an, usw. Gerade solche Aufgabenformate kann ein CAS jedoch erfüllen. Die zu lösende Gleichung wird eingegeben und das System liefert das Ergebnis. Steht ein solches System ständig zur Verfügung, muss sich die Aufgabenstellung ändern. Dann macht es keinen Sinn, den Lernenden nur solche Fragen zu stellen, deren Antwort sie alleine per Befehlsaufruf ermitteln können. Häufig wird daraus der vorschnelle Schluss gezogen, dass Schülerinnen und Schüler solche mathematischen Basisfertigkeiten wie Gleichung lösen und Term umformen gar nicht mehr lernen sollen oder zu lernen brauchen. Die Integration des CAS regt lediglich dazu an, die Aufgabenformate zu variieren, von der bloßen Ergebnisorientoierung zu befreien und ein variantenreiches Üben mit vielfältigen Aufgaben zu realisieren. Es ist nicht zwingend, dass mit dem Rechnereinsatz diese ganze Thematik obsolet wird bzw. nur noch auf die Zulieferfunktion für Modellierungsaufgaben reduziert wird. Viele Aufgabenformate sind denkbar, die das Verstehen und Üben im Bereich Gleichungen und Terme bereichern können und bei denen das CAS nicht nur nicht stört, sondern auch neue zusätzliche Aufgabenvariationen ermöglicht - zum Beispiel durch das Generieren vielfältiger Beispiele. So kann ein „Löse die Gleichung!“ in der Aufgabenstellung modifiziert und bereichert werden durch Aufgabenformate wie:

- Erkläre, analysiere, interpretiere....das Ergebnis, das der Rechner liefert!
- Nenne sinnvolle Zwischenschritte, die zum Ergebnis hinführen.
- Veranschauliche das Ergebnis durch eine Grafik!
- Erfinde eine Situation, die zu dieser Rechnung führt!
- Klassifiziere die verschiedenen Gleichungen/ Funktionen.
- Nenne weitere Gleichungen, die zu diesem Ergebnis führen.
- Schließe auf eine allgemeine Formel.
- Löse die Gleichung mit Hilfe einer Grafik, einer Tabelle, eines Terms...

Natürlich sind solche Aufgabenformate prinzipiell auch ohne Rechner realisierbar, jedoch bringt der Rechner den Vorteil, dass Beispiele leicht erzeugt werden können als Grundlage für allgemeines Schließen, Strukturieren oder Klassifizieren. Zudem erlaubt der Rechner ein schnelles Überprüfen von Vermutungen. Bei solchen Aufgabenvariationen bleibt der Fokus auf dem innermathematischen Aspekt des Gleichung lösens oder Term umformens, gewinnt aber eine andere Tiefe als das lapidare Format „Löse“. Hierbei wird der viel zitierte Satz von Schupp (1994) einmal mehr konkretisiert:

> *Der Computer zwingt uns zum Nachdenken über Dinge, über die wir längst hätten nachdenken müssen.* ([Schupp 1994], S.70)

Dieser Satz ist auch in dem Sinne zu verstehen, dass durch den Rechnereinsatz auch weitergehende komplexe Anwendungsaufgaben im Unterricht möglich werden. Es können reale Daten anstatt geschönter glatter

Werte in ganz anderem Maße in den Unterricht integriert werden, da die zeitaufwändigen Kalküloperationen an den Rechner abgegeben werden können. Der Blick kann auf die Interpretation des Problems fokussiert werden und Modellierungskreisläufe können schneller und auch mehrmals durchlaufen werden. So hilft es zum Beispiel, wenn das Multiplizieren großer Übergangsmatrizen vom Rechner übernommen wird und man so den Überblick behält über Entwicklungstendenzen und Prognosen. Die Befreiung von langwierigen und teilweise eintönigen Rechnungen schafft Raum für das Analysieren, das Suchen nach geeigneten Modellierungen, das Interpretieren und das Vergleichen alternativer Wege, das Optimieren und das Veranschaulichen.

Eine mögliche Kategorisierung verschiedener Aufgabenformate beim CAS-Einsatz und weiterreichende Anregungen zum Aufgabendesign liefern die verschiedenen Funktionalitäten, die ein Computeralgebrasystem originär mitbringt (vgl. zum Beispiel die oben genannte Liste von Doerr/Zangor (2000). Danach kann ein CAS eingesetzt werden zum Berechnen, zum Transferieren (Wechseln der Darstellungsform), zum Daten erfassen, zum Untersuchen und Entdecken, zum Visualisieren und zum Überprüfen. Wenn diese Aktivitäten grundsätzlich mit einem CAS möglich sind, dann sind damit auch entsprechende Aufgabenformate verbunden, um diese Aktivitäten auszulösen. So wird das Transferieren allein durch das Nutzen des CAS zwar nahe gelegt, aber erst durch entsprechende Fragestellungen initiiert (z.B."Nenne die Vor- und Nachteile der verschiedenen mathematischen Darstellungsarten beim Bestimmen der Nullstellen!"). In diesem Sinne regen die verschiedenen Funktionen des Rechners dazu an, eine Vielfalt von Aufgaben zu stellen und bei der Konzeption von Unterrichtssequenzen einzubeziehen.

Neben diesen Funktionen des Rechners wurden von Beginn des CAS-Einsatzes im Unterricht an „didaktische Prinzipien" zur Gestaltung von Aufgaben diskutiert und empfohlen wird, den Rechnereinsatz im Unterricht theoretisch zu fundieren. So wurde in Österreich in Anlehnung an die Ideen von Buchberger (vgl. Kapitel 6.2) zum Beispiel das „Whitebox-Blackbox-Prinzip versus Blackbox-Whitebox-Prinzip" (vgl. [Heugl/Klinger/Lechner 1996]) aufgestellt.

Mit dem „Whitebox-Blackbox-Prinzip" wird der Grundsatz beschrieben, dass ein Algorithmus (z.B. Ableiten, Gleichung lösen), über den der Rechner verfügt, erst dann genutzt wird, wenn das entsprechende mathematische Verfahren dem Lernenden bekannt ist. Das Verfahren wird dann an den Rechner „übergeben", um den Lernenden vom jeweiligen Kalkül zu entlasten, sobald es händisch beherrscht wird. Dieses Prinzip wird grundsätzlich dann verfolgt, wenn der Rechner als Rechenwerkzeug genutzt wird, um zum Beispiel eine Fülle von Daten zu verarbeiten, wobei hauptsächlich einfache Algorithmen ausgeführt werden, die dem Nutzer prinzipiell vertraut sind (z.B. bei der Multiplikation großer Matrizen). Das „Blackbox-Whitebox-Prinzip“ sieht die Nutzung des Rechners als Werkzeug zum Erlernen des neuen Inhaltsbereiches vor, das heißt, der Rechner ist zunächst eine Blackbox, deren Nutzung aber dazu führt, die dahinterstehende Mathematik und im besten Fall auch den Rechner zu verstehen. Beispielhaft dafür ist die Untersuchung von Aliasing-Effekten des Rechners (vgl. [Herget/Keunecke/Malitte/Stachniss-Carp 2001], [Herget/Keunecke/Malitte/Stachniss-Carp 2002], [Herget/Malitte 2002], [Hischer 2002], [Lambert 2005]), wodurch sowohl mathematische Kenntnisse erworben werden können als auch der Rechner als solcher besser durchschaut werden kann. Ein Beispiel ist auch die grafische und algebraische Erkundung von Taylorpolynomen (vgl.[Barzel 1991], [Barzel 1992]). Dies führt nicht nur zu Kenntnis und Verständnis der Taylorpolynome, sondern auch zur Einsicht in Rechnergrenzen („Wie berechnet der Rechner Sinus?“). Das Blackbox-Whitebox-Prinzip kommt auch dann zum Zuge, wenn der Rechner im Sinne eines Lernwerkzeugs eingesetzt wird und die Schülerinnen und Schüler zum Beispiel aufgrund einer Fülle von Beispielen, die der Rechner generiert, auf eine dahinter liegende Form schließen sollen (vgl. das Erschließen der Ableitungsregeln in Baustein W, vgl. Seite 23).

Ein weiteres Prinzip, das im Zusammenhang mit den Entwicklungen in Österreich postuliert wurde, ist das, was Kutzler (1995) als „Gerüstdidaktik“ bezeichnet. Dahinter verbirgt sich die Idee, Algorithmen an den Rechner abzutreten, auch wenn diese Algorithmen händisch noch nicht beherrscht werden. Damit besteht die Chance, gleich dem Aufsteigen auf einem Gerüst, weitere Fertigkeiten (wie zum Beispiel das Modellieren) zu erwerben, auch wenn bestimmte Kalküle noch nicht routiniert gekonnt sind. Damit hat Kutzler (1995) die Diskussion um die Frage fortgeführt, welche händischen Fertigkeiten im CAS-Zeitalter noch gefordert werden müssen und welche nicht. Diese Frage hatte schon 1991 Herget auf der 9. Tagung des Arbeitskreises Mathematik und Informatik der GDM in der Form „Wieviel Termumformungen, Kurvendiskussionen,... braucht der Mensch?“ aufgeworfen, und bis heute ist darauf keine befriedigende Antwort gefunden. Diese Diskussionen haben aber vor allem den Finger in die Wunde gelegt, dass die starke Orientierung auf bestimmte Kalkülfertigkeiten manch seltsame Blüten im Unterricht treibt und viel Energie und Zeit wegnimmt für weitere, vertiefende mathematische Fertigkeiten. So kommt es auch heute noch vor, dass das Lösen quadratischer Gleichungen von Klasse 9 bis zum Abitur zum immer wieder rezipierten und abgefragten Stoff gehört.

Ein drittes Prinzip geht ebenfalls auf die Erfahrungen der österreichischen Kolleginnen und Kollegen zurück, es ist das „Modul-Prinzip“[15]. Modul steht dabei für ein mathematisches Objekt, das der Schüler bzw. die Schülerin selbstständig programmiert oder definiert und damit das Potenzial des Rechners für den eigenen Lernweg erweitert. Im Sinne des instrumentalen Zugangs ist dieses Schaffen eines Moduls ein Beispiel für die Instrumentalisierung, für die individuelle Gestaltung des Rechners. Lehmann (2001) hat diese Idee weitergeführt und verschiedene Module (von ihm „Bausteine“ genannt) von Schülerinnen und Schülern untersuchen lassen. Ein Beispiel ist der „Geraden-Baustein“ $gerade(m, x, n) := m * x + n$ und die damit verbundene Aufgabe „Untersuche den Baustein!“

Solche didaktischen Prinzipien sind sicher hilfreich, aber bleiben punktuelle Hilfen bzw. Reflexionsgrundlagen. Sie sollten in eine umfassende Konzeption von Unterrichtsgestaltung eingebettet sein und ein Teil der Unterrichtskultur werden.

Veränderung der Unterrichtsorganisation beim Rechnereinsatz

Die Unterrichtskultur, die eine Lehrperson pflegt, ist stets von ihren epistemologischen Grundüberzeugungen und Vorstellungen („beliefs“, vgl. [Törner 2002]) geprägt. Jost (1992) hat diese Grundüberzeugungen im Rahmen einer Interview-Studie untersucht und sie in Beziehung gesetzt zu der Art und Weise, wie die Lehrpersonen grafikfähige Taschenrechner in ihrem Unterricht eingesetzt haben. Jost hat die Vorstellungen der Lehrpersonen bzgl. der Rolle des Rechners auf einer Skala angeordnet zwischen Rechenwerkzeug („computational tool“), um bestimmte Verfahren zu vollziehen, und Instruktionswerkzeug („instructional tool“), um Verstehen zu unterstützen. Ergebnis dieser Untersuchung war: Lehrpersonen, für die der Rechner ein Rechenwerkzeug ist, verfolgen vor allem inhaltsorientierte Ziele und sehen Lernen hauptsächlich durch Zuhören initiiert. Auf der anderen Seite fokussieren die Lehrpersonen, die den Rechner als Unterstützung beim Verstehen schätzen, ein schülerzentriertes Arbeiten mit einer interaktiven, offenen Unterrichtskultur. Kendal/Stacey (2002) haben ebenfalls den Zusammenhang zwischen Art und Weise des Rechnereinsatzes und der jeweiligen Unterrichtskultur untersucht und auch weitere Studien einbezogen, die das Ergebnis von Jost stützen.

Dieses Ergebnis passt zu der Erfahrung vieler Lehrpersonen, dass insbesondere offene Aufgabenstellungen, die vom CAS weit mehr als nur Berechnungen

[15] vgl.http://www.acdca.ac.at/projekt2/rechen/08.pdf

und Visualisierungen erfordern, eine Veränderung der Unterrichtsorganisation erfordern. Bereits die offene Fragestellung als solches induziert ein Aufbrechen eines eng geführten Arrangements und zwingt dazu sich von der Maxime „Einzel- Partner- oder Gruppenarbeitsphasen nie länger als 15 Minuten pro Unterrichtsstunde“ zu verabschieden. Eine offene Aufgabenstellung wie „Durch welche Funktionen kann ein Autobahnkreuz beschrieben werden?“ erfordert Zeit, um in Ruhe Bedingungen zu finden, mathematische Modelle zu erörtern und verschiedene Varianten durchzuspielen. Damit ist die klare Struktur eines traditionellen Frontalunterrichts aufgebrochen und die Frage nach der Veränderung der Unterrichtsorganisation gestellt. Der gleichzeitige Rechnereinsatz verstärkt diese Notwendigkeit noch zusätzlich, da jede individuelle Tätigkeit am Rechner die Vielfalt der möglichen Aspekte und Lösungswege noch erhöhen kann.

Im Rahmen eines Frontalunterrichts kann CAS lediglich eingesetzt werden zur Präsentation und Visualisierung oder als Werkzeug nur bei eng umrissenen Fragen innerhalb einer zeitlich begrenzten Einzel-, Partner - oder Gruppenarbeitsphase. Doch bereits bei solch begrenzten Fragestellungen ist es mit einem CAS schwieriger als ohne, den Gleichschritt auf ein gemeinsames, möglichst einheitliches Ergebnis hin zu erreichen. Jedes individuelle Arbeiten am Rechner – und seien es nur zwei unterschiedlich gezoomte Grafiken – erschwert eine einheitliche Dokumentation und Ergebnissicherung. In einer offenen Unterrichtssituation sind solche Divergenzen von vorne herein stärker einbezogen und unter Umständen beabsichtigt.

Bei Fragen, wie längere Schülerarbeitsphasen zu organisieren und zu moderieren sind, lässt sich auf allgemeine Vorschläge und Methoden zu schülerzentrierten Unterrichtsformen zurückgreifen. Verwiesen sei auf Formen kooperativen Lernens nach Green/Green (2005) und Klippert (2000) und Erfahrungen in der Grundschule oder im modernen Management (vgl. zum Beispiel [Weidenmann 2004]). So bietet das Gruppenpuzzle zum Beispiel eine effiziente Art, Ergebnisse von heterogen arbeitenden Gruppen zu vergleichen oder langwierige Präsentationsphasen zu verkürzen. Außerdem erhöhen fast alle schülerzentrierten Organisationsformen (z.B.: Werkstattarbeit, Stationenzirkel, Gruppenpuzzle) den fachlichen Austausch unter Schülerinnen und Schüler, schützen vor einer zu starken Dominanz des Lehrers und erziehen dazu, Lernen nicht nur als Konsumieren wahrzunehmen, sondern als Arbeit, die eine eigene Auseinandersetzung und Durchdringung der Materie erfordert. Und genau diese Haltung ist bei offenen Aufgaben, zu deren Lösung ein CAS verfügbar ist, nötig.

Kapitel 7

Zur Methode: „Lernwerkstatt“ als Weg selbstständigen Lernens

7.1 Die Notwendigkeit des Freiraums beim Lernen

Die Frage nach der Balance zwischen Konstruktion und Instruktion war und ist aktuell in Theorie und Praxis schulischer Bildung eine zentrale Frage. In der Theorie geht es um die Untersuchung, wie Lernen geschieht und wo im weiten Feld zwischen einem konstruktiven individuellen Lernprozess und einem instruktiven Vermitteln das Optimum an Wissens- und Kompetenzzuwachs erfahren werden kann. Ging man lange davon aus, dass erfolgreiches Lernen allein vom richtigen Erklären und Weitergeben abhängt, weiß man heute, dass Lernen nur geschieht, wenn das Individuum aktiv Wissen aufbauen und mit bereits vorhandenem Wissen verweben kann, mit anderen Worten, wenn Lernen konstruktiv und kumulativ erfolgen kann (vgl. [Borneleit/Danckwerts/Henn/Weigand 2001]). Dieser Grundsatz wird heute sowohl von Lernpsychologen ([Aebli 1993], [Vygotskij 1978]) wie von Neurobiologen ([Maturana/Varela 1987], [Spitzer 2002]) geteilt und ist von Mathematikdidaktikern mit enstprechenden Konzeptionen adaptiert und umgesetzt worden (z.B. [Wittmann 1997], [Hußmann 2002]). Der Anspruch konkretisiert sich in der Forderung nach dem vermehrten Einsatz konstruktivistischer Lernumgebungen ([Reinmann-Rothmeier/Mandl/Prenzel 1994], [Blumstengel 1998], [Hußmann 2002]). Die von diesen Autoren genannten Merkmale lassen sich in folgenden vier Aspekten zusammenfassen:

- Als Ausgangspunkt einer konstruktivistischen Lernumgebung sollte ein möglichst *komplexes Problem* gewählt werden, das im Idealfall vom Lernenden als Herausforderung gesehen wird. Dieses Problem sollte möglichst *authentisch* sein, d.h. es sollte auf die sonst übliche wesentliche Vereinfachung und Reduzierung der Komplexität verzichtet werden. Dabei muss jedoch die Erreichbarkeit und Realisierbarkeit für die Lernenden im Blick behalten werden, denn ein zu offenes, kaum zu bewältigendes Problem, das Lernende nur resignierend aufgeben lässt, konterkariert die Idee jeglichen Lernforschritts und sollte vermieden werden. So können auch *Anwendungskontexte* „situiert“ dargeboten werden. „Situiert“ heißt hier, dass das Problem zwar in einem größeren Kontext dargeboten wird, aber dennoch didaktisch reduziert.

- Konstruktivistische Lernumgebungen sollten *multiple Kontexte und multiple Perspektiven* berücksichtigen. Multiple Kontexte fördern die Dekontextualisierung und den Transfer auf andere Situationen. Multiple Perspektiven gewähren, dass Situationen und Probleme unter verschiedenen Aspekten und auf verschiedene Weise bearbeitet und reflektiert werden können. Die verschiedenen Perspektiven können im Rahmen des Unterrichts auch dadurch erzeugt werden, dass die verschiedenen mathematischen Repräsentationen bedacht werden (vgl. Kapitel 5.3).

- Lernumgebungen sollen die Möglichkeit des *sozialen Kontextes* schaffen, damit das gemeinschaftliche Erarbeiten und Anwenden von Lösungen im sozialen Austausch gefördert wird. Forschungen im Bereich des kooperativen Lernens haben bestätigt, dass gerade der Grundsatz der Kooperation im sozialen Kontext sich in vielfältiger Weise positiv auf den Lernprozess auswirkt. Green/Green (2005, S.33) haben die Forschungserkenntnisse zum kooperativen Lernen zusammengetragen und die wichtigsten Ergebnisse in einem Überblick herausgestellt. Bezogen auf den einzelnen Schüler bzw. die einzelne Schülerin nennen sie unter anderem folgende Aspekte: Entwicklung von Denkfähigkeit auf höherem Niveau, Förderung der Lernverantwortung, Erweiterung des Selbstwertgefühls, Entwicklung von Kommunikationskompetenz, Stärkung der Lernzufriedenheit und Training weiterer sozialer Kompetenzen, Teambildung bei Problemlösungen – bei gleichzeitiger individueller Verantwortung. Green/Green beziehen sowohl Partner- wie auch Kleingruppenarbeit mit ein. Die spezifische Bedeutung dieser Sozialformen für den Mathematikunterricht liegen darin, dass die Möglichkeit des freien Austausches von Ideen und Ansätzen zwischen Schülerinnen und Schüler die wichtigste Basis dafür liefern, dass grundlegende Tätigkeiten des Mathematiktreibens eingeübt und das Potenzial solcher Aufgaben für den individuellen Lernprozess genutzt werden können. Die Bedeutung des informellen Raums für die mathematische Kommunikation beschreibt Hefendehl-Hebeker (2004a) in besonderer Weise. Sie legt die Charakteristika eines rationalen Dialogs auch beim dialogischen Lernen im Mathematikunterricht zu Grunde. Ein solcher Dialog sollte unvoreingenommen, zwanglos und nicht persuasiv sein. Er ist dann *unvoreingenommen*, wenn alle Beteiligten im Gespräch ihre Überzeugungen allein durch sachliche Begründungen kontrollieren, *zwanglos*, wenn Äußerungen nicht sanktioniert werden und der Dialog ist *nicht persuasiv*, wenn es keine fraglos hingenommenen Grundlagen gibt. Im Rahmen eines solchen herrschaftsfreien Dialogs kann Lernen wirklich ein Akt selbstgesteuerter Bildung von Wissensnetzen sein, die an das eigene Vorwissen und Können anknüpfen. Dabei müssen Schülerinnen und Schüler lernen, sich auf andere im sozialen Kontext einzulassen, deren Ideen an zu hören, um so auch fremde und vielleicht ungewohnte Gedankengänge nachvollziehen und mit den eigenen verknüpfen zu können. Nur so können Zusammenhänge hergestellt, Unterschiede pointiert und Schwierigkeiten geklärt und erklärt werden. Bereits Diesterweg (1958) hat die Kraft der gegenseitigen Belehrung und helfenden Aussprache zwischen Schülerinnen und Schülern als bedeutsam hervorgehoben:

> *Wähle dir bei dem Studium eines Lehrgegenstandes einen Geistesverwandten oder einen oder mehrere lernbegierige Schüler, mit welchen Du denselben Gegenstand behandelst, besprichst, durchdenkst! (...) Erst wenn wir zur mündlichen Mitteilung uns veranlaßt sehen, wenn wir den Gegenstand der Individualität des anderen anpassen müssen, wenn wir etwa auch die Gegenbemerkungen und Einreden derselben vernehmen und zu widerlegen haben (...) erhebt sich der Gegenstand zum vollen Licht des Bewußtseins. Darum sucht der, der dies aus eigener Erfahrung weiß, Gelegenheit, das still Gedachte in die Lautsprache zu übertragen. Dies setzt eine höhere Tätigkeit voraus, also wenn man seine Gedanken bloß dem Papier anvertraut. Mit dem lebendigen Wort wird auch der Gedanke erst recht lebendig.* ([Diesterweg 1958], S.48)

Saar (1992) schließt aus Diesterwegs Äußerungen, dass zur vertieften und umfassenden Aneigung das Zusammenwirken der Schülerinnen und

Schüler in der Gruppe nötig ist. Er geht sogar so weit, dass wirkliche Aneignung nur in der Einheit von individueller und zusammenwirkender (kooperativer) Tätigkeit erreichbar ist. Er betont, dass das Verbalisieren als solches sich positiv auf die eigene Handlungssicherheit und -bewußtheit auswirkt, da man dadurch feststellt, inwieweit die Handlung beherrscht wird oder nicht. Dabei äußern sich die Handlungen in Gruppenarbeit als Momente der unmittelbaren Hilfe und Unterstützung so wie Momente der gegenseitigen Aktivierung, Stimulierung, Kontrolle und Wertung.

- Konstruktivistische Lernumgebungen sollen die *Artikulation und Reflexion* der Problemlösungsprozesse unterstützen. Neben der Ebene der konkreten Problembearbeitung geht es also auch darum, eine Meta-Sicht anzuregen in dem Sinne, dass Lernende Gedanken über die Wissensinhalte von einem höheren Standpunkt aus artikulieren, dass sie über die eigenen Denk-, Arbeits- und Lernprozesse nachdenken und diese in Worte fassen. Eine so genannte „Metakognition“ versetzt Lernende besser in die Lage, Wissen über die unmittelbare Situation hinaus zu generieren und sich allgemeine Problemlösungsstrategien anzueignen, diese zu verfeinern und sich ihrer bewusst zu werden. Dieser Aspekt berücksichtigt sowohl die verbale wie auch die schriftliche Artikulation und Reflexion, bezieht also die Dokumentation des Lernprozesses mit ein. Dabei geht es auch hier nicht nur um das Aufnehmen von Ergebnissen und fertigen Produkten, sondern im Sinne der Idee von Lerntagebüchern und Forschungsheften ([Hußmann 2003]; [Ruf/Gallin 1998]) auch um das Dokumentieren der Reflexion und der Besonderheiten des eigenen Lernweges.

Freiraum zum Lernen schafft nicht nur die Grundlage, spezifisches Wissen aktiv in das eigene Wissensnetz einzuweben und übergreifende Strategien zu erwerben, vielmehr können auch grundlegende psychische Bedürfnisse des Einzelnen in positiver Weise angesprochen werden können. Gerade darin sehen Deci/Ryan (1993) eine wichtige Basis für Motivation. Sie sehen aufgrund mehrerer Studien die These bestätigt, dass

> *Motivation für qualititav hochwertige Leistungen dann am höchsten ist, wenn Kontrollbedingungen minimiert und die Unterstützung der Autonomie optimiert werden.* ([Deci/Ryan 1993], S. 223)

Danach muss es also einen Raum geben, in dem Lernende frei von Kontrolle agieren und intellektuelle Arbeit verrichten können. Deci/Ryan nennen in ihrer Selbstbestimmungstheorie als zentrale Eckpfeiler jeglicher Motivation die folgenden drei psychischen Grundbedürfnisse, die es zu befriedigen gilt (vgl. [Deci/Ryan 1993], S. 229). Sie postulieren, dass jeder Mensch das Bestreben hat nach:

- **Autonomie** und Selbstbestimmung,
- dem Erleben von eigener **Kompetenz** und Wirksamkeit und
- sich mit anderen Personen in einem sozialen Milieu verbunden zu fühlen (**soziales Eingebundensein**).

Für Deci/Ryan stehen diese Bedürfnisse in enger Wechselwirkung mit intrinsischer wie extrinsischer Motivation. Intrinsisch motivierte Verhaltensweisen sehen sie in erster Linie in Verbindung mit den Bedürfnissen nach Kompetenz und Selbstbestimmung, extrinsisch motivierte dagegen – vor allem während ihrer Entwicklung – in Verbindung mit allen drei Bedürfnissen. Fasst man sie im Blick auf schulisches Handeln zusammen und will man ihnen gerecht werden, so sollten Lernende sich in ihrer sozialen Gruppe als effektiv und wirksam erleben und dabei persönlich als autonom und initiativ erfahren können.

Doch was heißt all dies konkret für die Praxis in der Schule? Den Versuch, Konstruktion und Instruktion auszubalancieren, vollziehen Lehrpersonen tagtäglich, wenn sie entscheiden müssen, was sie den Schülerinnen und Schülern vorgeben und was sie diese selber entdecken lassen. Das gilt für die Unterrichtsvorbereitung ebenso wie für die spontane Reaktion im Unterrichtsgeschehen. Und dabei empfinden viele die Ziele des Fachlichen einerseits und die des Reifenlassens andererseits als widersprüchlich und gegenläufig. Das ist verständlich, wenn die inhaltlichen Ziele in erster Linie in Form der curricularen Stoffkataloge wahrgenommen werden, die oft immens sind, und andererseits die Zeit knapp ist. Deshalb verwundert es nicht, dass viele Lehrpersonen verleitet sind, eher ein Durchhetzen durch Stoffkataloge zu praktizieren als dem Motto „Weniger ist mehr“ im Sinne des Exemplarischen zu folgen, zumal sie sich dann gegebenenfalls über Vorgaben hinwegsetzen müssen. Aber eben dieses Exemplarische ist notwendig, um ein Innehalten zu ermöglichen, damit die Inhalte auch verstanden und durchdrungen werden können. Im Unterricht müssen Raum und Zeit für solche individuellen konstruktiven Lernprozesse gewährt werden, damit Schülerinnen und Schüler an eben diesen Inhalten auch allgemeine Kompetenzen und Fertigkeiten einüben und erwerben können. Auch Hefendehl-Hebeler (2004b) sieht diese widerstreitenden Absichten. Ihrer Meinung nach liegt die Widersprüchlichkeit darin begründet, dass Inhalte und Bedeutungen nie mit ihren Darstellungen identisch sind, aber nur durch diese vermittelt werden können. Sie spricht hier von einem „didaktischen Dilemma“ und führt treffend aus:

> *Verstehen kann daher auch nicht einfach das Ergebnis einer Mitteilung sein; es gibt grundsätzlich keine Methode der automatisch gelingenden Übertragung von verstehendem Wissen, die Lehrende auch nur einigermaßen erfolgssicher anwenden könnten. Dagegen kann man aber den konstruktiven Verstehensprozess durch die eingesetzten unterrichtlichen Maßnahmen besser oder auch schlechter unterstützen. Das stellt den Mathematikunterricht vor die Aufgabe, Lernumgebungen zu konstruieren und zu moderieren, die zugleich Orientierungen vermitteln, aber auch Spielräume für die Eigentätigkeit der Lernenden eröffnen; es kommt darauf an, ein fruchtbares Spannungsverhältnis zwischen Anleitung und Offenheit zu erzeugen und über einen längeren Zeitraum auch aufrecht zu erhalten.* ([Hefendehl-Hebeker 2004b], S.10)

Für viele Lehrpersonen sind solche Erkenntnisse und Forderungen in dieser Zuspitzung neu, bieten aber durchaus einen Erklärungsrahmen für die vielfachen, selbst beobachteten Lernprobleme vor allem hinsichtlich der fehlenden Nachhaltigkeit beim Lernen vieler Schülerinnen und Schüler. Deshalb muss sich eine Unterrichtskultur, die im Wesentlichen von einem instruktiven Vermitteln via Erklären und Weitergeben und vor allem Kontrollieren geprägt ist, vor der Aufgabe sehen, den Schwerpunkt zu verschieben und Unterrichtssequenzen zu integrieren, die einem „konstruktivistischen“ Lernen verpflichtet sind. Es geht darum, Lernenden mehr Offenheit für freiheitliches Tun sowohl zuzumuten, zuzutrauen und zu gewähren, um den Nährboden zu schaffen, dass Lernende Forschergeist gebären können. Jedoch dürfen solche Forderungen nicht im abstrakten Raum allgemeiner Sentenzen verharren, sondern müssen sich in konkreten Vorschlägen für den alltäglichen Unterricht niederschlagen. Dabei spielt die Frage der Unterrichtsorganisation eine wichtige Rolle, die im folgenden Abschnitt erörtert werden soll.

7.2 Zur Frage der Unterrichtsorganisation

Die theoretische Einsicht in die Notwendigkeit, den Unterricht zu öffnen, ist das eine – die praktische Realisierung das andere. Vielfach fehlen Ideen, wie ein stärker konstruktivistisch ausgeprägtes Arrangement im Unterricht konkret aussehen kann.

Wiechmann (2000) gibt einen theoretischen Orientierungsrahmen, der in erster Linie zur Konzeption aber auch zur Reflexion von Unterricht dienlich ist. Basis für ihn ist der Grundsatz, dass Unterrichtsmethodik stets im Wechselspiel mit den Inhalten stehen muss. Eine Entweder-Oder-Haltung zwischen instruktiver Vermittlung oder konstruktiver Erarbeitung sollte es nicht geben. Eher will er eine mögliche Bandbreite unterrichtlichen Handelns beschreiben und plädiert für eine Vielfalt an Unterrichtsmethoden. Die Möglichkeiten dieser Vielfalt verankert er im Spannungsfeld zweier Skalen, die eine nennt er „gelenkt - autonom“ und die andere „expositorisch - entdeckend“. So spezifiziert er das Handlungsfeld zwischen Instruktion und Konstruktion. Wendet man dieses Schema auf den Mathematikunterricht an, lassen sich diese beiden Skalen beschreiben als die Art der Fragestellung („innere Methode“) einerseits und die Art der Unterrichtsorganisation andererseits („äußere Methode“) (vgl. Abbildung 7.1). Dieser Orientierungsrahmen weist zugleich die Richtungen, in denen eine Veränderung von Unterricht vollzogen werden kann, wenn es darum gehen soll, die Bandbreite der Anforderungen an Schülerinnen und Schüler zu erhöhen - entweder lässt sich die Art der Fragestellung oder die Unterrichtsform in Richtung einer verstärkten Schüleraktivierung verändern.

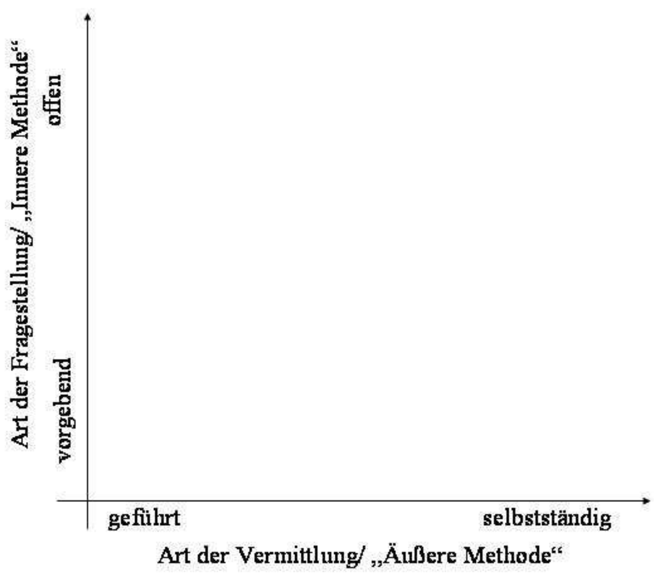


Abbildung 7.1: Orientierungsrahmen zur Unterrichtsmethodik

Dieses Feld der Möglichkeiten sei an einigen Beispielen erläutert: Links unten im Schema sind alle konvergenten, geschlossenen Aufgaben anzusiedeln, bei denen Lösungsweg und Ergebnis eindeutig bestimmt sind und die eng geführt vermittelt werden. Geht man auf dieser unteren Ebene weiter nach rechts, so lassen sich viele traditionelle Freiarbeits- und Übungsmaterialien einordnen. Die Aufgabenstellung bleibt eng auf eindeutige Lösungen (z.B. Kalkülaufgaben) ausgerichtet, jedoch hat der einzelne Schüler oder die einzelne Schülerin im Unterricht Raum und Zeit für deren Bearbeitung. Viele Materialien zum Wiederholen und Üben bestimmter Themenfelder, die für den außerunterrichtlichen Bereich angeboten werden (z.B. die meisten Lernprogramme) gehören in diesen Bereich. Ganz anders dagegen ist der Weg einer offenen Fragestellung in einem gelenkten Unterrichtsgespräch, was im Schema links oben anzusetzen wäre. Dieser Weg wird häufig beim traditionellen Unterricht gewählt, wenn zum Einstieg in ein neues Thema eine offene Frage gestellt wird, deren Beantwortung aber in einem vorgeplanten Lösungsweg mündet und keinen Raum lässt für eventuelle alternative Wege oder Erkenntnisse. Ein Beispiel ist die klassische Frage nach der Bestimmung des Flächeninhalts unter einer Kurve als Einstieg in die Integralrechnung. Diese Frage ist für Schülerinnen und Schüler leicht zu erfassen und öffnet ein Tor zu vielen verschiedenen Wegen, Ideen und Ansätzen. Häufig wird diese Vielfalt aber schnell auf einen von der Lehrperson vorgedachten Weg kanalisiert, wobei im Extremfall jegliche alternativen Ansätze nicht weiter beachtet oder verfolgt werden.

Eine weitgehende Unterrichtsöffnung – im Schema oben rechts anzusiedeln – erfolgt bei einer kreativen, offenen Fragestellung in einer Selbstständigkeit fördernden Lernumgebung, in der die Schülerinnen und Schüler die Freiheit und den Raum haben, Art und Weise des Lösungsweges selbst zu bestimmen. Einen solchen Weg beschreibt Hußmann (2002) mit dem Einsatz intentionaler Probleme (auch ([Hußmann 2003]). Das Ziel dieser Konzeption ist, durch offene Fragen Schülerinnen und Schüler anzuregen, selbst Mathematik zu entdecken und zu entwickeln. Gemeint sind Problemstellungen, zu denen Schüler und Schülerinnen sinnvolle Fragen entwickeln, diese zu beantworten versuchen und aus den Erfahrungen und Reflexionen der Beantwortung auf eine dahinter liegende allgemeine Theorie schließen.

Andere Wege lassen sich ebenfalls rechts oben im Schema einordnen. Es sind die leicht zu erfassenden, „einfachen“ Fragen, die aber ein weites Feld an Mathematik öffnen und für deren Bearbeitung die Schülerinnen und Schüler längere Zeit brauchen. Zur Bearbeitung solcher Fragen sind gegebenenfalls eine oder mehrere Unterrichtsstunden nötig, insbesondere wenn zusätzlich eine zufriedenstellende Dokumentation der Arbeit gefordert ist. Dazu gehören Fragen wie:

- „Entwirf ein Weinglas!“ zum Abschluss der Differential- und Integralrechnung im Grund- oder Leistungskurs ([Barzel/von Saint-George 2003])

- „Was verbirgt sich hinter Taylor?“ – als Aufforderung, selbstständig am Computeralgebrasystem sowohl die graphische Bedeutung der Taylorschen Formel herauszufinden als auch aufgrund spezieller Taylorpolynome auf eine allgemeine Formel zu schließen. ([Barzel 1991])

Die Richtung „Art der Fragestellung“ wird vielfach als einzige Möglichkeit wahrgenommen, Unterricht zu öffnen und zu verändern. Darauf weist auch Leuders (2001) kritisch hin und stellt heraus, dass vielfach allein Aufgaben den thematischen Verlauf des Mathematikunterrichts gliedern und als wesentliches und einziges Medium der Kommunikation über Mathematikunterricht dienen. Dabei ist jedoch die zweite Richtung ebenso wichtig. Eine schöne Aufgabe allein ändert nicht die Unterrichtskultur, sie kann sogar im Korsett einer eng geführten Fragekette an Niveau hinsichtlich der Schüleranforderungen verlieren. Zudem ist die Gefahr in einem fragend-entwickelnden Lehrer-Schüler-Gespräch groß, dass der Gesprächsverlauf allein durch den von der Lehrperson favorisierten Lösungsweg bestimmt wird, ohne dass alternative Ideen und Ansätze von Lernenden zum Zuge kommen. Auf diese Gefahr verweisen verschiedene Forscher im Bereich der Mathematikdidaktik aufgrund qualitativer Untersuchungen traditioneller Unterrichtsstunden (vgl. [Hefendehl-Hebeker 2003]; [Voigt 1984]).

Unterrichtsmethodik gerät heutzutage schnell in den Verdacht, als Allheilmitel zur Kompetenzsteigerung überbewertet zu werden. So propagiert etwa Klippert (2000) Methoden zur Teamentwicklung im Klassenraum, die helfen sollen, klassisch fragend-entwickelnden Unterricht aufzubrechen zu Gunsten von schülerzentrierten Aktionsformen. Ähnliche Methoden werden auch im Rahmen des kooperativen Lernens von Green/Green (2005) empfohlen, hier jedoch theoretisch fundiert und reflektiert aufgrund 30-jähriger Begleitforschung auf unterschiedlichen Ebenen.

So hilfreich solche allgemeinen Anregungen für die Gestaltung des Unterrichts sein mögen, so unabdingbar ist es, diese zunächst leeren Gebäude mit inhaltlichem Leben des einzelnen Faches zu füllen und Lehrpersonen vor Ort mit dieser Aufgabe nicht allein zu lassen. So gehören enge, konvergente Aufgaben nicht in den Rahmen einer Gruppenarbeit; in einem methodisch überhöhten Gruppenarbeits-Arrangement geraten sie zur Peinlichkeit. Gruppenarbeit ist nur dann adäquat, wenn es sinnvoll ist, gemeinschaftlich an der Lösung eines Problems zu arbeiten. Nur wenn es – um mit Blankertz (1974) zu sprechen

– einen Implikationszusammenhang zwischen den Inhalten und der Methodik von Unterricht gibt, können einzelne Methoden ihr Potenzial für den Lernprozess wirklich entfalten. Und wenn man sich dann entsprechend der gewählten Aufgabe für einen Zugang mit Gruppenarbeit entschieden hat, helfen Anregungen zur Organisation, um diese Gruppenarbeit selbst sowie die Präsentation zeitökonomisch und anregend zu gestalten. Ein solcher Organisationsrahmen sichert Lernenden den nötigen Freiraum zur eigenständigen Arbeit und schützt sie vor der Dominanz der Lehrperson. Dies ist zum Beispiel wichtig, um bei der Problemlösung nicht zu sehr in die Richtung des von der Lehrperson präferierten Lösungsweges gedrängt zu werden.

Beispiele für einen solchen Organisationsrahmen bieten die bereits genannten Formen des kooperativen Lernens, wie Gruppenpuzzle, Stationenzirkel und Lernwerkstatt. Die Lernwerkstatt nimmt bei diesen Unterrichtsformen noch zusätzlich eine Sonderrolle ein, da sie sich über einen längeren Unterrichtszeitraum erstreckt und nicht nur auf eine oder wenige Unterrichtsstunden begrenzt ist. Dabei wird ein noch größerer Teil an Verantwortung für den Lernprozess in die Hände der Lernenden selbst gelegt. Für alle diese Organisationsformen gilt, dass sie Hilfen darstellen, um Gruppenunterricht sowohl praktikabel als auch effizient zu gestalten. Diese Hilfen sind insbesondere wichtig für Lehrende, die in ihrer eigenen Biographie sowohl als Lernende wie Lehrende immer nur frontal geführte Vermittlung erlebt haben und so keine Vorstellung einer klar strukturierten, stringenten, schülerzentrierten Arbeitsform entwickeln konnten.

7.3 Was ist eine Lernwerkstatt?

Der Begriff „Werkstatt“ steht im herkömmlichen Sinn für einen Fertigungsort, an dem vorwiegend in handwerklicher manueller Tätigkeit Gebrauchsgüter gefertigt werden. Diese enge Begriffsbestimmung hat aber schon immer eine Erweiterung erfahren. So bemächtigen sich seiner ganz andere Bereiche wie zum Beispiel die Kunst, die Musik, die Literatur, die Philosophie und nicht zuletzt die Pädagogik und Didaktik.

Allen Bedeutungen ist gemeinsam, dass „Werkstatt“ stets mit intellektueller, praktischer und kreativer Arbeit verbunden ist, deren Ziel es ist, ein auf den „Abnehmer“ zugeschnittenes „Produkt“ zu erzeugen. Dabei wird „Werkstatt“ entweder als eine Konzeption und Methode oder als eine Handlungs- und Aktionsstätte (z.B. ein Raum, ein Fortbildungszentrum) gesehen. Pallasch/Reimers (1997) verstehen den Begriff „Werkstätten“ im weiteren Sinne als Methode, die zunächst im gesellschafts-politischen Bereich als „Zukunftswerkstätten“ und im industriellen Bereich als „Lernstätten“ aufkamen, bevor sie auch im schulischen Bereich - dort vor allem in der Grundschule - adaptiert wurden. Dementsprechend definiert Pallasch eine Werkstatt sehr allgemein als:

> *..eine an pädagogisch-pschologischen Methoden orientierte Veranstaltungsform, die als Gegenentwurf zu referentenorientiertem Lehren, Lernen und Arbeiten versucht, über die aktive Beteiligung ihrer Teilnehmerinnen und Teilnehmer an der Erarbeitung einer Thematik die Ergebnisse in konkretes betriebliches, (gesellschafts-)politisches, pädagogisches usw. Handeln umzusetzen. Sie ist nicht an eine bestimmte Thematik gebunden (...) Werkstatt -bzw. workshoporientierte Arbeit versteht sich als Gegenentwurf zum referentenorientierten Lernen in der Erwachsenenbildung oder zum lehrerzentrierten Unterrichten in den Schulen.* ([Pallasch/Reimers 1997], S.132)

Im Unterschied dazu sieht Bönsch (2000) eine „Werkstatt“ als einen festen Ort, als einen

> *(...) Lernort innerhalb einer Schule oder Hochschule (...), der durch seine Ausstattung mit Geräten (Werkzeugen) und Materialien es ermöglicht, Lernen als Werken und Wirken, als Produzieren und Gestalten, Experimentieren und Erproben, als Handeln und Lernen mit allen Sinnen zu realisieren und dies in vornehmlich individuell und kooperativ initiierter Weise* ([Bönsch 2000], S.5)

Solche Lernwerkstätten als feste Orte, wie sie hier anklingen, finden sich insbesondere in Grundschulen und Hochschulen. In Grundschulen ist es entweder ein eigener Raum für alle Jahrgänge oder es ist der jeweilige Klassenraum, der für alle Fächer als Werkstatt gestaltet ist und in dem der Unterricht entsprechend gestaltet wird. In Hochschulen sind es feste Räume, in denen Lehrpersonen, künftige wie gegenwärtige, und auch Schülerinnen und Schüler zusammen kommen, um gemeinsam Unterrichtsmaterial zu entwickeln, zu erstellen und damit zu arbeiten.

Die historischen Vorbilder für „Lernwerkstätten“ sind vielfältig. Viele Reformpädagogen haben die eigene Erfahrung und das Erleben und Verarbeiten von Phänomenen als Ausgangspunkt des Lernens gefordert (z.B.: [Freudenthal 1973], [Wagenschein 1983], [Hansen-Schaberg/ Schonig 2002]). Für „Lernwerkstätten“, wie sie heute meist verstanden werden, lassen sich im Wesentlichen zwei Personen als historische Vorbilder nennen: John Dewey und Helen Parkhurst.

- Für den Philosophen John Dewey (1859 – 1952) ist „experience" der zentrale Begriff, der auch die zahlreichen Schriften zu Erziehungs- und Schulfragen prägt (zitiert nach [Neubert 2004]). In „School and Society" beschreibt er Erfahrungen in seiner 1896 gegründeten Chicagoer „Laboratory school" und gibt eine erste theoretische Fundierung dieser Schulidee. Nach Dewey gilt für die Schule :

  > *Als ein Ort des Lernens wird sie nach dem Modell des »Labors« (im weiten Sinne dieser Metapher) gestaltet, womit ein Lernen durch aktives Experimentieren, Konstruieren, Ausprobieren, Beobachten und Diskutieren in Kooperation mit anderen Lernenden besonders betont wird.* ([Neubert 2004], S.10)

  Damit sind bereits konstitutive Elemente der späteren „Lernwerkstätten" beschrieben.

- Die von Helen Parkhurst (1887 – 1973) gegründete Schule in Dalton, Massachussetts, und die danach bezeichnete Konzeption „Daltonplan" geht ebenfalls von der Idee von „Laboratorien" aus, in denen sich die Heranwachsenden in konstruktiven Problemlösungen als lernfähig erfahren können. Dabei bezieht sich Parkhurst nicht nur auf John Dewey, sondern wesentlich auch auf Maria Montessori, deren Ideen sie in den USA verbreitet und auf den Sekundarbereich ausgeweitet hat ([Popp 1995]).

Das Konzept des Daltonplanes ([Parkhurst 1922]) ist offen insofern, als dass weder bestimmte Methoden noch strikte Regeln vorgegeben werden. Grundlage sind lediglich die folgenden vier Prinzipien:

- **Freiheit**: Hiermit ist nicht uneingeschränkte Freiheit sondern Wahlfreiheit gemeint wie freie Wahl des Platzes, der Methode in Bezug auf die Quellen des Wissenserwerbs, freie Zeiteinteilung, und freie Wahl der Interaktionsform (Einzel-, Partner- oder Gruppoenarbeit).

- **Verantwortung**: Der Schüler bzw. die Schülerin ist selbst verantwortlich für die eigene Arbeit und deren Fortschritt. Die Gestaltung des Unterrichts soll so ein, dass im Einzelnen das Bewusstsein geweckt wird, dass das Lernen „eigene Sache" ist und nicht die der Lehrperson. Dieses Prinzip hat Auswirkungen auf die Lehrerrolle: Die Lehrperson zieht sich von der traditionell „dominanten" Rolle zurück und greift nur noch bei Bedarf helfend und beratend ein.

- **Zusammenarbeit**: In der Arbeit mit anderen, für die sich das Kind bzw. der Jugendliche selbst entscheiden muss, lernt man den anderen zu respektieren, die eigene Meinung zu formulieren und diese vor anderen zu vertreten. Dadurch werden die eigenen Gedanken stärker konturiert und pointiert.

- **Selbsttätigkeit**: Die Schüler und Schülerinnen sind für das Gelingen ihrer Arbeit selbst verantwortlich und müssen die ihnen dafür zur Verfügung stehende Zeit auch eigenverantwortlich einteilen.

Es gibt noch heute eine Vielzahl von Schulen, die nach den Grundsätzen des Daltonplans unterrichten - vor allem in den Niederlanden und England ([Thiel 2003]).

Schon Helen Parkhurst hat bewusst den Versuch unternommen, „Laboratorien" nicht nur im Grundschul- sondern auch im Sekundarschulbereich zu etablieren. Trotzdem finden sich heutzutage die meisten Lernwerkstätten immer noch in Grundschulen. Eine wichtige Ursache für die geringe Verbreitung im Sekundarbereich ist sicherlich die Aufgliederung in Fachunterricht an den weiterführenden Schulen. Verbunden damit ist, dass es während eines Schultages einen häufigen Lehrerwechsel gibt und eine Taktierung auf 45 Minuten-Einheiten strukturell vorgegeben ist. Beides erschwert die Realisierung von Lernwerkstätten. Dennoch gibt es immer mehr Kolleginnen und Kollegen, die versuchen, die Idee der Lernwerkstätten trotz der strukturellen Hürden in ihrem Fachunterricht zu realisieren. Diesem Bestreben mag die Erfahrung zu Grunde liegen, dass Schülerinnen und Schüler häufig selbstständige Arbeitsformen aus der Grundschule gewöhnt sind, diese aber an der weiterführenden Schule wieder verlernen. Denn dort herrscht eine Unterrichtskultur vor, die Lehrenden und Lernenden wenig Freiraum und Handlungsspielraum im Lehr- und Lernprozess lässt. Insbesondere in der Schweiz gibt es aktive Kollegien, die mit dem Einsatz von Lernwerkstätten die schulische Unterrichtskultur im gegebenen strukturellen Rahmen zu bereichern versuchen ([Weber 1998], [Barzel/von Saint-George/ Weller 2000]) und aufgrund ihrer positiven Erfahrungen entsprechende Fortbildungen anbieten. Die Ursprungsidee für die hier entwickelte und untersuchte Lernwerkstatt ist aufgrund solcher Anregungen entstanden.

Doch was macht eine Lernwerkstatt als Unterrichtsmethode aus? Hier hilft der Blick auf die Merkmale, die Pallasch/Reimers (1997) als konstitutive Elemente einer Werkstatt allgemein nennen. Zunächst gilt die Lernwerkstatt als ein Rahmen, konstruktivistisches Lernen zu realisieren. Sie soll Raum für Interaktion und Kommunikation bieten, wobei der Lern- und Arbeitsprozess aktiv mitbestimmt wird. Zur Konkretisierung nennen Pallasch/ Reimers vier Prinzipien:

1. **Partizipationsprinzip**: Alle Mitglieder der Werkstatt können aktiv ihr Wissen, ihr Interesse und ihre Fähigkeiten einfliessen lassen. Dadurch haben sie die Möglichkeit, Verlauf und Ergebnis der Werkstattarbeit unmittelbar zu beeinflussen. Dies geschieht im geschützten Rahmen der Kleingruppe. Da ist die Lernatmosphäre entspannt, Ideen können angstfrei geäußert werden. So können Selbstsicherheit und der Glaube an die eigenen Begabungen wachsen.

2. **Strukturierungsprinzip**: Die Arbeit in der Werkstatt sollte klar strukturiert und transparent sein, um Klarheit und Orientierung während der Arbeit zu gewährleisten. Dies kann zum Beispiel erfolgen, iondem die einzelnen Phasen mit ihren verschiedenen Funktionen erklärt werden (wie Vorbereitungs- und Informationsphase, Arbeitsphase, Präsentations- und Reflexionsphase). Zudem ist von allen Beteiligten eine bestimmte Lern- und Arbeitsdisziplin gefordert, um eine angemessene Arbeitsatmosphäre für alle Beteiligten zu sichern.

3. **Ganzheitsprinzip**: Nach dem Motto „Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Einzelteile“ wird gefordert, dass die Thematik möglichst in ihrer Ganzheit mit unterschiedlichen Facetten und Zugängen dargeboten wird. Damit kann das Thema auf vielfältigen, unterschiedlichen Wegen erarbeitet und verschiedene Lernpräferenzen und -typen angesprochen werden. Damit ist sowohl Ganzheit im Sinne einer inhaltlichen Fülle gemeint wie auch eine Fülle an verschiedenen Darstellungsebenen. Eine erste Orientierung in Bezug auf die Darstellungsebenen gibt Bruner (1974) mit den Bereichen „enaktiv, ikonisch und symbolisch“. Auch die Ausweisung von verschiedenen Lerntypen, wie Vester (2001) oder Hüholdt (1993) sie beschreiben, kann eine Hilfestellung sein, eine mögliche Vielfalt zu gestalten (z.B.visuell, auditiv, audiovisuell, abstrakt-verbal). Dabei sind natürlich durch die thematischen Gegebenheiten bestimmte Grenzen gegeben, die es jedoch immer wieder zu bedenken gilt, um starre Beschränkungen zu vermeiden. Für den Mathematikunterricht wird dieses Prinzip greifbar in der Forderung, alle im Rahmen der Thematik möglichen mathematischen Repräsentationsformen wie auch die verschiedenen Grundvorstellungen zum jeweiligen Begriff einzubeziehen (vgl. 5.3).

4. **Balanceprinzip**: Eine Werkstatt sollte in verschiedener Hinsicht „in Balance sein“. Auch wenn jede Werkstatt ein Ergebnis anstrebt, sollte

dieser Blick aiuf das Ergebnis nicht das aktuelle Erleben des Prozesses schmälern. Der Erkenntnisgewinn sollte sich nicht nur auf das neue fachliche Wissen beziehen, sondern auch auf das eigene Lernverhalten, die eigenen Fähigkeiten und sozialen Kompetenzen. Ein Balanceakt obliegt sicherlich auch dem/der Moderator/in, wenn einerseits den Teilnehmern/innen mehr Freiheiten zugesprochen werden und er/sie andererseits darauf zu achten hat, dass das angestrebte fachliche Ziel nicht verfehlt wird.

In diesen Prinzipien spiegeln sich die oben ausgeführten Merkmale konstruktivistischer Lernumgebungen wieder (vgl. Seite 109). So lässt sich im Partizipationsprinzip das Merkmal des sozialen Kontextes erkennen oder das Ganzheitsprinzip als eine Konkretisierung der Forderung nach Komplexität und Authentizität deuten. Der Wert dieser Lernwerkstatts-Prinzipien gegenüber den theoretischen Merkmalen konstruktivistischer Lernumgebungen liegt im Grad der Konkretisierung, was für die Konzeption des Unterrichtsmaterials hilfreich ist. Aus diesem Grund werden im folgenden Kapitel die didaktischen Anmerkungen zum konkreten Material der hier untersuchten Lernwerkstatt nach diesen vier Prinzipien strukturiert.

7.4 Die Entscheidungen bei der hier vorliegenden Lernwerkstatt

Wie bereits in Kapitel 5 ausgeführt, ging es bei der hier untersuchten Lernwerkstatt um die Erarbeitung der Kriterien zur Untersuchung von (ganzrationalen) Funktionen. Dabei war oberstes Ziel, dass die Schülerinnen und Schüler sowohl verschiedene Kriterien kennen lernen als auch einen souveränen Umgang und das Zusammenspiel der Kriterien einüben, damit sie je nach Problemstellung das adäquate Mittel zur Untersuchung anwenden können. Dabei werden ihnen die einzelnen Aspekte zur Funktionsuntersuchung in Form von „Bausteinen“ oder „Stationen“ dargeboten, die es ähnlich einem „Stationenzirkel“ zu bearbeiten gilt. Im Unterschied zu einem „Stationenzirkel“ erstreckt sich die hier untersuchte Unterrichtsseqeunz auf eine längere Zeit von mindestens 15 Unterrichtsstunden. Neben dem Schülerarbeitsheft gibt es ein Lehrerarbeitsheft ([Barzel/Fröhlich/Stachniss-Carp 2003]) mit zusätzlichen Materialien für einzelne Stationen, Lösungen und Klausurvorschläge (vgl. Kapitel 6.5).

Für die konkreten Entscheidungen bei der Konzeption der Lernwerkstatt waren die bereits beschriebenen vier Prinzipien nach Pallasch/Reimers (1997) leitend: Partizipations-, Strukturierungs-, Ganzheits- und Balanceprinzip.

Partizipationsprinzip

Die Arbeit mit der Lernwerkstatt erfolgt in Kleingruppen von 4-5 Schülerinnen und Schüler. Aus der Erfahrung während der Pilotierung wird eine heterogene Gruppeneinteilung hinsichtlich Leistungsvermögen und Geschlecht empfohlen. Die Arbeit erstreckt sich über eine lange Zeit von ca. sechs Wochen. Während dieser langen Zeit wäre bei leistungshomogenen Gruppen die Gefahr einer Niveau-Differenz unnötig groß. Auch innerhalb leistungsheterogenen Gruppen können individuelle Fähigkeiten ausgebildet und gefördert werden. Zudem erlaubt eine leistungs-gemischte Gruppierung ein gegenseitiges Helfen, Erklären und Unterstützen und so gemeinsames Weiterentwickeln.

Jeder Schüler und jede Schülerin erhält ein Heft mit den Arbeitsaufträgen für die unterschiedlichen Bausteine bzw. Stationen. Den unterrichtenden Lehrperson wird im Begleitheft empfohlen, die Schülerinnen und Schüler zu motivieren, die Verantwortung für den Lernprozess der Gruppe wie den eigenen bewusst als Herausforderung anzunehmen.

In diesem Zusammenhang kann auch das Besprechen der Kriterien zur Bewertung der Gruppenarbeit hilfreich sein. Als Orientierungsvorschlag wurde in das Lehrerbegleitheft eine Übersicht aufgenommen, welche Kriterien zur Bewertung herangezogen werden können. Dabei werden sowohl die Aspekte bezüglich der Arbeit des Einzelnen wie der Gruppe in Betracht gezogen.

Partizipation der einzelnen Schülerinnen und Schüler ist auf verschiedene Weise möglich, sie können sich auf verschiedene Weise einbringen und die Gruppenarbeit mitgestalten. Zunächst gilt es, den jeweiligen Weg durch die Lernwerkstatt zu bestimmen und die Arbeit mitsamt der Hausaufgaben festzulegen. Zu achten ist auf Stringenz und Effektivität der Arbeit, um den geforderten Stoff in der gegebenen Zeit bewältigen zu können. Bei Schwierigkeiten und Fragen müssen geeignete metakognitive Strategien zur Problemlösung entwickelt werden. Dazu gehören zum Beispiel neben einem erneuten Durchdenken der Materie unter einer anderen Persepketive auch die Möglichkeiten des Nachschlagens in Schulbüchern oder Lexika (die im Klassenraum ausliegen sollen) oder gezieltes Nachfragen. Es werden hier also metakognitve Strategien sowohl deklarativ als auch exekutiv im Sinne von Christmann/Groeben (1999) benutzt, d.h. die Schülerinnen und Schüler sind angehalten, sowohl den Lernprozess zu reflektieren ud zu beschreiben als auch das Wissen darum konkret in das strategische und planvolle Handeln einzubeziehen (vgl. auch [Sjuts 2003]).

Strukturierungsprinzip

Um die Stuktur der Arbeit in der Werkstatt transparent zu machen, erhalten die Schülerinnen und Schüler auf der ersten Seite des Schülerheftes eine graphische Übersicht über mögliche Wege durch die Lernwerkstatt. Dabei werden auch Phasen deutlich erkennbar. In einer ersten Phase geht es um die Erarbeitung der Bausteine W und A als Vertiefung zum Ableitungsbegriff, bevor die Arbeit an E, L, K, S, N und R zur Erarbeitung neuer Aspekte der Funktionsuntersuchung beginnt. Daran schließt sich eine Phase des gemeinsamen Sammelns im Kursverband an, um Zwischenergebnisse zu besprechen und zu sichern. Hier ist auch Raum für eventuell notwendige Korrekturen und das Klären offener Fragen. Der unterrichtenden Lehrperson wird empfohlen, dass die Ergebnisse der einzelnen Stationen von einzelnen Gruppen präsentiert werden. Damit alle „das Ganze“ im Auge behalten und sich nicht frühzeitig auf den zu präsentierenden Baustein fixieren, sollte erst eine Unterrichtsstunde vor der Präsentationsphase per Los entschieden werden, welche Gruppe was vorstellt.

Um den konkreten Stand des Arbeitsprozesses in der ganzen Klasse bzw. dem ganzen Kurs für alle transparent zu machen, ist im Lehrerheft eine Tabelle als Vordruck gegeben, in der die einzelnen Gruppen ihren Arbeitsstand eintragen können. Diese Tabelle soll im Klassenarum ausgehängt werden und macht für alle sichtbar, welche Bausteine schon von welcher Gruppe bearbeitet wurden.

Ganzheitsprinzip

Die Schülerinnen und Schüler erhalten mit dem Arbeitsheft sämtliche Aufgaben von Beginn der Lernwerkstatt an. Damit wird die Funktionsuntersuchung von Beginn an in ihrer Vielfalt und Reichhaltigkeit an Untersuchungskriterien dargeboten und der einzelne Bereich bzw. hier Baustein bleibt immer mit dem Ganzen verbunden. Dadurch soll erleichtert werden, die Funktionsuntersuchung als das zu vermitteln was sie ist – ein Gefüge unterschiedlicher Kriterien, die souverän je nach Situation angewendet und verbunden werden können.

Die Ganzheit der Thematik soll auch dadurch erreicht werden, dass alle mathematischen Repräsentationen und damit die verschiedenen Zugänge einbezogen werden. Dies ebnet den Weg, die eigenen Präferenzen zu erfahren und zu erleben. So werden bei den Aufgabenstellungen grundsätzlich – soweit sinnvoll und möglich – immer die drei Darstellungsarten graphisch-visuell, numerisch-tabellarisch und formal-symbolisch einbezogen (vgl dazu auch die Ausführungen in 5.3.1 und 6.4.1). Zum anderen bietet Baustein A bewusst ein Experiment (vgl. Seite 24), um auf diese Weise einen enaktiven Zugang zum Ableitungbegriff einzubeziehen und die Grundlegung des Zusammenhangs zwischen Graphen von Funktionen und deren Ableitungen auch als reale Erfahrung zu ermöglichen.

Balanceprinzip

Um den Fokus der Lernenden nicht nur auf das Produkt sondern ebenso auf den Prozess zu richten, muss der Blick der Lernenden auf den eigenen Lernprozess angeregt werden. Um dies zu erreichen und die individuellen Wege schätzen zu lernen, ist es wichtig, dass Reflexion verbalisiert und dokumentiert wird. Dies geschieht im Rahmen der Lernwerkstatt durch die Empfehlung, dass die Schülerinnen und Schüler ein Lerntagebuch zur Arbeit mit der Lernwerkstatt verfassen sollen. Als Hilfestellung und Orientierung für Lernende und Lehrende, denen diese Form der Dokumentation noch fremd ist, dient die Kopiervorlage „Musterblatt für die Dokumentation“ (vgl. Anhang A) im Lehrerheft, die vor der Arbeit mit der Lernwerkstatt im Plenum besprochen werden kann. Dadurch gewinnt die begleitende Lehrperson eine wichtige Grundlage, die einzelnen Wege nachzuvollziehen und eventuell korrigierend und richtungsweisend einzuwirken.

Teil III

Die Studie - Konzeption und Auswertung

Das hier beschriebene Projekt fühlt sich dem Anliegen von Mathematikdidaktik als „Design science“ verpflichtet und stellt demnach das Wechselspiel zwischen Entwerfen, Erforschen und Weiterentwickeln von Unterricht und Unterrichtsmaterial ins Zentrum. Nachdem im ersten Teil die theoretischen Grundlagen der Unterrichtssequenz – hier für die Lernwerkstatt zum Einstieg in die Funktionsuntersuchung mit integriertem Rechnereinsatz – dargelegt wurden, geht es im nun folgenden zweiten Teil um die Evaluation dieser Lernwerkstatt. Zunächst wird die Konzeption der Studie (Kapitel 8) dargestellt. Ausgehend von der Forschungsfrage (Kapitel 8.1) wird der Aufbau der Studie mit der Aufteilung in eine qualitative und eine quantitative Studie entwickelt (Kapitel 8.2). Im Anschluss daran werden die Ergebnisse und Erkenntnisse aus der Auswertung der Teilstudien dargelegt. Kapitel 9 richtet den Blick auf die qualitative Teilstudie, Kapitel 10 widmet sich der quantitativen Teilstudie. Diese Einzelstudien sind keineswegs unabhängig voneinander abgelaufen, sondern es ist insbesondere die quantitative Teilstudie stark von den Erfahrungen und Ergebnissen der qualitativen Teilstudie geprägt. Das Kapitel 11 bildet den Abschluss mit einem Resumee der Gesamtstudie und einem Ausblick auf mögliche Anschlussprojekte.

Kapitel 8

Zur Konzeption der Studie

Das Wechselspiel zwischen Entwerfen, Erforschen und Weiterentwickeln von Unterricht und damit der Brückenschlag zwischen Theorie und Praxis wird in neuerer Zeit von Müller/Steinbring/Wittmann (1997) mit der Sicht von Mathematikdidaktik als „Design science“ neu belebt und bildet auch den Rahmen für das hier beschriebene Projekt. Was verbirgt sich hinter diesem Schlagwort? Originär findet sich der Begriff im Bereich des Industriedesigns und bezeichnet das Bemühen um Optimierung der äußeren Gestalt industrieller Produkte. Dabei geht es um die Güte der Produkte als Grundlage für gute Absatzmöglichkeiten. Damit ist klar, dass nicht nur ästhetische Maßstäbe zählen, sondern wesentlich auch Aspekte der Praktikabilität und der Nützlichkeit des jeweiligen Produkts eine wichtige Rolle spielen. Ein Produkt muss sich im alltäglichen Einsatz bewähren und zu den Menschen mit ihren Bedürfnissen und Gewohnheiten passen, damit es leicht in individuelle Handlungen integriert werden kann und der Nutzer sich unterstützt fühlt.

Bei der Recherche zu „Design Science“ fallen zwei Grundsätze auf, die in den unterschiedlichsten Industriebereichen auszumachen sind. Sie lassen sich mit den Slogans „Form follows function“[1] und „Fitting the products to the people“ [2] beschreiben. Auch wenn der Vergleich zwischen Industrieproduktion und Unterrichtsentwicklung merkwürdig anmutet, so ist doch die Parallelität der Sichtweise unverkennbar. Ästhetische Maßstäbe gelten für beide Bereiche.

[1] Dieser Slogan geht zurück auf den US-amerikanischen Architekten Louis Henri Sullivan (1856 – 1924). Er formulierte diesen Grundsatz in dem Artikel „The Tall Office Building Artistically Considered“ in Lippincott's Magazine aus dem Jahr 1896 und ging damit in die Architektur- und Designgeschichte ein.

[2] z.B.: Slogan der Firma „Design science Consulting“, die neben der direkten Beratung bei der Produktentwicklung auch wissenschaftliche Studien im Rahmen von Verbraucher-Forschung durchführen. www.dscience.com, Stand: 8.1.2006

Marktwirtschaftliche Kriterien sind mit motivationalen Fragen vergleichbar. Ergonomische Aspekte im Industriellen sind in der Didaktik lern- und kognitionspsychologische Aspekte der Frage, wie ein effizientes, nachhaltiges Lernen angeregt werden kann. Das Spannungsfeld zwischen der inhaltlichen Funktion und der optimalen Gestaltung für den nutzenden Menschen finden sich sowohl beim industriellen Design wie beim Design von Unterrichtsmaterial. Auch beim Lernen und Lehren geht es nicht nur darum, der jeweiligen inhaltlichen Funktion – meist das Verstehen der Thematik und das Erlernen von Fähigkeiten und Fertigkeiten – gerecht zu werden. Die Fachdidaktik beschäftigt sich insbesondere mit der Frage, wie der Lernprozess adäquat für den Einzelnen zu gestalten ist. So schreibt Hefendehl-Hebeker:

> *Dabei muss die Didaktik zwischen zwei Polen vermitteln: dem streng organisierten System des (fertigen) mathematischen Wissens auf der einen und den verschiedenen individuellen Erkenntniswegen auf der anderen Seite.* ([Hefendehl-Hebeker 2003], S.27)

oder betont Steinbring:

> *Zum einen muss beachtet werden, dass der Gegenstand mathematikdidaktischer Forschung nicht das mathematische Wissen „an sich" ist, sondern dass dieses Wissen grundsätzlich im Kontext sozialer Prozesse der Vermittlung verortet werden muss* $\cdots$ ([Steinbring 1998], S.161)

Aufgrund der Verwandtschaft der Paradigmen von Fachdidaktik und Design science verwundert es nicht, wenn Simon (1990) Pädagogik und Didaktik gemeinsam mit den Ingenieurwissenschaften, Architektur, Wirtschaftswissenschaften, Jura und Medizin als Disziplinen ansehen, die von ihrem Wesen her mit „Design" befasst sind. Diese Disziplinen vermitteln nach Simon Wissen über „künstliche Objekte" im Unterschied zu den Naturwissenschaften, bei denen es um Wissen über natürliche Objekte geht. Auf diese Idee beziehen sich Müller/Steinbring/Wittmann (1997), wenn sie Mathematikdidaktik als „Design science" bezeichnen. Im Mittelpunkt einer so verstandenen Fachdidaktik steht damit einerseits die wissenschaftliche Beschäftigung mit der Konzeption und der Entwicklung neuer Unterrichtsmaterialien und -wege und andererseits deren Untersuchung und Evaluation. Dabei steht weniger das Bewerten und Optimieren beobachteter Wege im Vordergrund, sondern das Verstehen der zu beobachtenden Lernprozesse als Grundlage, Kriterien zur Weiterentwicklung der Unterrichtskonzeption zu eruieren. Das Verstehen der Lernprozesse ist unerläßliche Grundlage für die wissenschaftsbasierte Optimierung von Unterricht, die rational begründend vorgeht. Wissenschaft ist nach Mittelstraß eine *„Lebens- und Weltorientierung, die auf eine spezielle, meist berufsmäßig ausgeübte Begründungspraxis angewiesen ist und insofern über das jedermann verfügbare Alltagswissen hinausgeht, ferner die Tätigkeit die das wissenschaftliche Wissen produziert.“* ([Mittelstraß 1996], S.719) Mittelstraß hebt hervor, dass sich Wissenschaft von daher deutlich von bloßer Meinung und Kunstfertigkeit unterscheidet. Dies gilt auch für wissenschaftliches Vorgehen im Rahmen von Unterrichtsentwicklung, die sich unterscheidet von Unterrichtskunst und Unterrichtshandwerk im praktischen Handeln. Evaluation und Entwicklung müssen als wissenschaftliches Vorgehen stets theoriebasiert und theorieerzeugend sein, wogegen es im praktischen Lehrhandeln um ein Verbessern geht, das zwar wohl begründet sein kann, aber stets auf Meinung und Erfahrung basiert. Dies betont auch Jungwirth und expliziert, dass Lehrpersonen zwar neue Unterrichtsorganisationen ausprobieren und Erkenntnisse dabei gewinnen, doch „es geht dabei um die Bewältigung der Dinge und nicht um die Begründung und Analyse der jeweiligen Art, in der diese stattfindet.“ ([Jungwirth 2004], S. 105)

Die Idee, Unterrichtsentwicklung als „design science“ zu begreifen, wird auch für „design research“ formuliert (vgl. [Drijvers 2003]), wobei hier das Durchlaufen mehrerer Zyklen aus Kreation des Materials, Testen in realem Unterricht, Analysieren des beobachteten Unterrichts (z.B. in Form interpretativer Studien) und Weiterentwickeln des Materials aufgrund der gewonnenen Erkenntnisse explizit gefordert wird.

8.1 Die Forschungsfrage

„Evaluation“ bedeutet im allgemeinen Sprachgebrauch sowohl Analyse als auch Bewertung eines Sachverhalts (vgl. [Brockhaus 1996-99]). Es geht also nicht alleine um Zertifizieren und Verbessern, sondern zunächst um Begreifen und Verstehen, um von da aus zu bewerten und gegebenenfalls zu verändern. Bei allen Schritten der Evaluation müssen objektive, nachvollziehbare Kriterien genutzt werden und die Ergebnisse schlüssig und valide sein. Dies gilt auch für die Evaluation eines Unterrichtsentwurfs. Hier sind zunächst die Ziele und die Ansprüche bestimmend, die mit der Konzeption des Entwurfs verbunden sind. Es ist in diesem Fall die Lernwerkstatt mit dem Ziel, dass Schülerinnen und Schüler eine Vielzahl unterschiedlicher Aktivitäten vollziehen, die ihnen die Mathematik des Themenbereichs nicht als fertiges Gebilde sondern als Werdendes und Prozessuales nahe bringt. Die Mathematik soll in ihrer Reichhaltigkeit von den Schülerinnen und Schülern exemplarisch erfasst und angewendet werden können. Der Inhalt – „Funktionen und ihre Eigenschaften“ – werden deshalb nicht nur als statische Wissenselemente vermittelt, sondern es wird ein souveränes Umgehen, Verknüpfen und Anwenden dieser Inhalte angestrebt. Inhalts- und prozessbezogene Ziele werden dabei gleichermaßen in den Blick genommen. Dabei werden die prozessbezogenen Ziele für den Mathematikunterricht auf der obersten Komplexitätsebene darin gesehen, dass Schüler und Schülerinnen lernen, Probleme zu lösen, mit Mathematik zu modellieren, zu begründen und zu beweisen und dass sie in der Lage sind, theoretische Begriffe zu bilden (vgl. [Tietze/Klika/Wolpers 1997]). Versucht man diese komplexen Kompetenzen bei der Konzeption von Aufgaben zu konkretisieren, führt dies zur expliziten Beschreibung von einzelnen Tätigkeiten, aus denen sich das jeweilige Komplex zusammensetzen lässt. So vollzieht sich zum Beispiel das Lösen eines Problems durch ein Geflecht aus Recherchieren, Erkunden, Systematisieren, Verknüpfen, Vergleichen, Interpretieren, Analysieren, Reflektieren und Validieren (vgl. auch Kapitel 5.3). Sollen Schülerinnen und Schüler das Problemlösen als Kompetenz erwerben, kann dies deshalb nicht nur auf dem Weg geschehen, ihnen offene, komplexe Probleme anzubieten, sondern auch dadurch, dass im Unterricht immer wieder ein Handlungsspielraum eröffnet wird, damit vielfältige Einzeltätigkeiten auch im Zusammenhang mit ganz unterschiedlichen Aufgabenstellungen vollzogen und geübt werden können.

Der Blick auf die Schüleraktivitäten als Perspektive der Evaluation ist also bereits in der Konzeption und dem Anspruch der Lernwerkstatt begründet. Zum anderen liegt diesem Fokus aber auch die Überzeugung zugrunde, dass die Vielfalt, Reichhaltigkeit und Intensität der kognitiven und metakognitiven Aktivitäten von Lernenden für Qualität und Nachhaltigkeit des Lernens entscheidend sind. Nur wenn Schülerinnen und Schüler von einem Thema die möglichen Grundvorstellungen erfahren, die prinzipiell verschiedenen Anwendungsbereiche kennenlernen und das Thema auf unterschiedliche Art dargestellt bekommen und selber darstellen, haben sie die Chance, einen Inhalt in seiner Tiefe und Weite zu begreifen. Deshalb müssen sich unterrichtliche Veränderungen immer daran messen lassen, welche Auswirkungen sie auf die Art und Weise der kognitiven wie auch metakognitiven Aktivitäten der Lernenden haben. So lässt sich das zentrale Forschungsanliegen dieses Projekts in der folgenden Kernfrage zusammenfassen:

Welche kognitiven Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler treten im Rahmen dieser Lernwerkstatt mit integriertem Rechnereinsatz auf und inwiefern bewirken diese Tätigkeiten, dass im Themenbereich „Untersuchung ganzrationaler Funktionen“ neben inhaltlichen insbesondere auch prozessuale Ziele verfolgt werden?

Bei der Beantwortung dieser Frage interessiert einerseits die Außensicht der Forscherperspektive, welche Tätigkeiten und Fertigkeiten aufgrund der analysierten Unterrichtssituationen, der Hefteinträge und der Klausurlösungen erkennbar werden. Andererseits soll aber auch die Innensicht der beteiligten Akteure – Lernende wie Lehrende – zur Beantwortung der Forschungsfrage einbezogen werden, um aufzunehmen, welches Potenzial und welche Schwierigkeiten aufgrund der persönlichen Erfahrungen mit der besonderen Unterrichtskonzeption gesehen werden. Ergänzt werden sollen diese beiden Perspektiven durch einen quantitativen Vergleichstest nach Abschluss der Unterrichtssequenz.

8.2 Aufbau und Methodologie der Gesamtstudie

Unterrichtsforschung steht bei methodischen Entscheidungen immer vor dem Problem, einerseits der Komplexität unterrichtlichen Geschehens gerecht werden zu wollen und andererseits wissenschaftliche Kriterien der Validität und Reliabilität erfüllen zu müssen. Darin liegt begründet, dass Unterrichtsforschung sich einer Fülle verschiedener Teildisziplinen bedient. Hesse/Wottawa (1997) nennen als relevante Bereiche Lern-, Kognitions-, Informationsverarbeitungs,- Entwicklungs-, Motivations,- und Sozialpsychologie. Deshalb ist auch bei den Publikationen zur Unterrichtsforschung nach Hesse/Wottawa kein geschlossenes wissenschaftstheoretisches Weltbild der Autorinnen und Autoren festzustellen und reicht die Bandbreite der verwendeten Methode von hermeneutischen Betrachtungsweisen des Unterrichtsgeschehens bis hin zu Experimentalstudien, die sich an den Verfahren der experimentellen Psychologie orientieren. Noch vielfältiger wird das Spektrum, wenn man die Paradigmen und Erkenntnisse aus dem Bereich der jeweiligen Fachdidaktik ergänzt. Diese Vielfalt passt zur Komplexität von zu untersuchendem Unterricht, Ausgangshypothesen und Forschungsfragen. Darin stecken Chance und Bürde zugleich. Eine Bürde stellt die Offenheit verfügbarer bzw. noch zu entwickelnder Forschungsmethoden dar, da unter Umständen Orientierung und Absicherung fehlen. Dies genau bietet ein wissenschaftlich konsolidierter, festgelegter, vielfach geprüfter Rahmen. Er kann eine klare Leitlinie bieten, die Sicherheit gibt und davor schützt, dass die Kreativität und Offenheit zur Unwissenschaftlichkeit entgleitet. Allerdings sind Offenheit und zur Verfügung stehende Vielfalt die einzige Chance, die komplexen Gegebenheiten von Unterricht wenigstens ansatzweise einzubeziehen. Dazu muss man es verstehen, *„originelle(n) Erweiterungen herkömmlicher Verfahren“* passend zu entwickeln, *„um der speziellen Unterrichtssituation gerecht zu werden“*([Hesse/Wottawa 1997], S.37). Diese Aufgabe erfordert vielfach Abstriche in der einen wie der anderen Richtung: Sei es, dass einerseits die Komplexität des Unterrichts beschnitten werden muss und nur bestimmte Parameter oder Prozesse betrachtet werden. Sei es, dass andererseits die wissenschaftlichen Methoden kreativ und flexibel angepasst werden müssen. Letztlich entscheidend für die jeweiligen Festlegungen ist das zentrale Forschungsanliegen, das in der Forschungsfrage kumuliert.

Die hier vorliegende Studie hat einen grundsätzlich zweipoligen Aufbau, es gibt eine empirisch-qualitative und eine empirisch-quantitative Teilstudie. Diese Zweipoligkeit ermöglicht, dass die Forschungsfrage nicht nur aufgrund einzelner Erkenntnisse sondern auch aufgrund einer Vielzahl von Erfahrungen beantwortet werden kann. So werden einerseits exemplarische Situationen aus der Lernwerkstatt wie die Arbeit an bestimmten Aufgaben oder Klausurlösungen näher beleuchtet und zum Erkenntnisgewinn herangezogen. Andererseits liegen Erfahrungen einer Vielzahl von Lehrpersonen mit ihren Schülergruppen hinsichtlich der ganzen Lernwerkstatt vor und können wissenschaftlich ausgewertet werden. Die Zweipoligkeit birgt zudem den Vorteil, dass sowohl die Außensicht der Forscherperspektive als auch die Innensicht der beteiligten Akteure einbezogen werden können. Die beiden Teilstudien stehen dabei keineswegs unabhängig voneinander, sondern sind eher als komplementär anzusehen. Diese Verknüpfung qualitativer und quantitativer Ansätze entspricht auch vielfältigen Empfehlungen (z.B. [Hefendehl-Hebeker 2003]) und Erfahrungen aus anderen Projekten der Mathematikdidaktik (z.B: mathe 2000 – [Müller/Steinbring/Wittmann 1997], [Hußmann 2002]). Auch für den Bereich der Forschung zu Fragen des Technologieeinsatzes im Mathematikunterricht haben Lagrange/Artigue/Laborde/Trouche (2003) in einer Meta-Studie diese beiden Grobrichtungen ausgemacht und betonen deren Ergänzung.

Nach einer Phase der Pilotierung wurde zeitlich zunächst der Fokus auf die qualitative Beobachtung des Lehr- und Lernprozesses in einem Kurs gerichtet und danach eine quantitative Erhebung angeschlossen. Dabei wurden Daten aus 50 Kursen einbezogen, in denen die Lernwerkstatt durchgeführt wurde. Die beteiligten Lehrpersonen und Schülerinnen und Schüler konnten über eine Online-Befragung Rückmeldung geben, und es wurde abschließend ein Vergleichstest durchgeführt.

8.2.1 Pilotierung

Sowohl das Unterrichtsmaterial selbst wie auch der Fragebogen für die Online-Befragung wurden einer Pilotierung unterzogen.

Das Unterrichtsmaterial wurde auf der Grundlage einer bestehenden Lernwerkstatt erarbeitet, die vom Kollegium des Marie-Curie-Gymnasium Ludwigsfelde mehrere Jahre zuvor entwickelt worden war. Hier war nach einer Fortbildung zum Thema „Lernwerkstatt“, die ein Schweizer Kollege durchgeführt hatte, eine Lernwerkstatt zum Thema „Kurvendiskussion“ entstanden. Von dieser ursprünglichen Lernwerkstatt stammen insbesondere die äußere Grobstruktur und einige organisatorische Details. Grundgedanke bei dieser ursprünglichen Version war bereits, die Methode „Lernwerkstatt“ als Weg zu nutzen, dass Schülerinnen und Schüler sich selbstständig die Grundbegriffe der Kurvendiskussion erarbeiten. Dieses Material war jedoch geprägt von sehr stringenten und engen Fragestellungen, die den Schülerinnen und Schülern wenig Spielraum zur freien Auseinandersetzung mit der Thematik boten und oft nur Raum für eine einzige Antwortmöglichkeit ließen. Zudem war der Einsatz von Funktionenplottern oder Computeralgebra nicht vorgesehen. Dieses Material wurde überarbeitet hinsichtlich einer Öffnung der Aufgabenstellungen, einer Erweiterung der Aufgabenvielfalt und insbesondere des Rechnereinsatzes. Die so entstandene neue Lernwerkstatt war Ausgangspunkt zu Beginn des hier vorgestellten Forschungsprojektes im Herbst 2002.

Zu Beginn des Forschungsprojektes wurden in einem ersten Schritt die Kriterien der Überarbeitung des Materials theoretisch reflektiert und aufbereitet. Die Ergebnisse dieser Reflexion sind im ersten Teil dieser Arbeit dargelegt.

Im Winter 2002 bis Frühjar 2003 wurde das Material einer Pilotierung in sechs Kursen unterzogen und aufgrund der theoretischen Kriterien noch weiter entwickelt. Dabei wurden punktuelle inhaltliche Korrekturen vorgenommen. Die Anzahl der Bausteine und Aufgaben wurde insgesamt reduziert und ein „Zwischenstopp“ zur Präsentation und Sicherung der wichtigsten Ergebnisse eingefügt. Einzelne Aufgabenstellungen wurden klarer und eindeutiger formuliert. Das auf diese Weise fertig gestellte Material wurde dann veröffentlicht ([Barzel/Fröhlich/Stachniss-Carp 2003]) und als Basis für den empirischen Teil des Forschungsprojektes genommen.

In der Pilotierungsphase wurden neben dem Unterrichtsmaterial die Forschungsinstrumente getestet und weiterentwickelt. Dabei ging es insbesondere um die Fragebögen für Lehrende und Lernende im Rahmen der quantitativen Studie, die nach der Unterrichtssequenz beantwortet werden sollten. Konzeption und Gestaltung der Fragebögen wurden zunächst im Rahmen der internen Didaktik-Arbeitsgruppe diskutiert und anschließend Mitarbeitern des soziologischen Instituts der Universität Duisburg zur Prüfung vorgelegt. Nach dieser Begutachtung wurden die Fragebögen in den Pilotkursen eingesetzt, um die einzelnen Items auf Verständlichkeit und Konsistenz zu prüfen. Dabei wurden einzelne Formulierungen verändert, insbesondere um sie eindeutig verstehen zu können.

8.2.2 Die qualitative Studie

Für die qualitative Studie erklärte sich Ekkehard Below vom Stiftsgymnasium Xanten (NRW) bereit, in seinem Grundkurs Mathematik der Jahrgangsstufe 11 das Material einzusetzen. Dabei wurden die Empfehlungen aus dem Lehrerheft angenommen. Der Unterricht fand statt im Zeitraum von April bis Juli 2003 (vgl. Kapitel 2). Folgende Daten wurden erhoben:

- 18 Unterrichtsstunden wurden gefilmt.
- Die Hefte einiger Schülerinnen und Schüler wurden ausgeliehen und konnten kopiert werden.
- Fünf Schülerinnen und Schüler wie auch die Lehrperson wurden im Anschluss an die Lernwerkstatt interviewt. Zwei Schülerinnen waren darüber hinaus zu einem weiteren Gespräch bereit. [3]
- Der Experimentalkurs wie auch die drei Parallelkurse der Schule nahmen (nach Abschluss der Thematik) an einer zentralen Vergleichsklausur des Landes Nordrhein-Westfalen teil. In den Parallelkursen wurde die Thematik klassisch ohne die Lernwerkstatt unterrichtet. Sämtliche Arbeiten aller vier Kurse wurden in Kopie zur Auswertung zur Verfügung gestellt. Die Kopien wurden erstellt, bevor die jeweilige Lehrperson die Klausuren korrigierte.

Sämtliches Material wurde im Sinne der Grounded Theory (nach [Strauss/Corbin 1996]) zunächst gesichtet, wurden markante Einzelaspekte im Sinne des Forschungsinteresses kodiert. Entsprechend der zentralen Forschungsfrage bezogen sich die Codes auf die kognitiven Schülertätigkeiten, die sichtbar wurden. Dabei war das Vorgehen bei Interpretation und Auswertung stets spiralig. Interessante Aspekte aus der Datenvielfalt wurden

[3] In diesem Gespräch wurde diesen Schülerinnen die Ergebnisse einer interpretativen Studie (Kapitel 9.1) vorgelegt. Diese beiden Schülerinnen waren in der analysierten Unterrichtssequenz die Hauptprotagonistinnen.

fokussiert und untersucht. Diese führten teils zu ersten Erkenntnissen, teils zu neuen offenen Fragen der Interpretation, die eine neue Sicht auf die Daten erforderte und ein kreatives Erkunden nötig machte. Die Auswahl der Unterrichtssequenzen war geleitet von den Interessen der Studie und es wurden letztlich die Sequenzen gewählt und transkribiert, die exemplarisch für die in Kapitel 5.3 genannten Tätigkeitsbereiche stehen – rezipieren, darstellen, analysieren, reflektieren und kreieren.

Auf diesem Weg wurden zwei Unterrichtssequenzen (vgl. Kapitel 9.1 und 9.2) sowie die vergleichende Auswertung einer der Aufgaben der Abschlussklausur (vgl. Kapitel 9.3) in den Mittelpunkt der näheren Untersuchung gestellt.

In der ersten Unterrichtssequenz geht es um die Zuordnung verschiedener Legeteile mit jeweils einem Graphen (vgl. Baustein Z auf Seite 34f). Die gemeinsame Suche nach Dreier-Sets von Graphen zu einer Funktion, deren Ableitungsfunktion und zweite Ableitungsfunktion zeigt den Wert der freien Kommunikation in besonderer Weise auf. Auch wenn im Gespräch meist nur bruchstückhafte Sätze ausgetauscht werden, findet eine wachsend intensivere Kommunikation statt und es kommt zu einem Austausch verschiedener Argumentationsstränge, die von verschiedenen Blickrichtungen und Zugangsweisen herrühren. Die besondere Problematik des Systematisierens und Begriffsbildens wird in der zweiten Unterrichtssequenz deutlich, bei der Schülerinnen und Schüler die Bedeutung von Extrem- und Wendepunkten erörtern (vgl. Baustein E,L und K auf den Seiten 26ff). Hier werden vor allem kognitive Dissonanzen deutlich, die ausgelöst werden durch unterschiedliche Bedeutungen von einzelnen Begriffen, die diese in der mathematischen Fachsprache und Umgangssprache haben. Die vergleichende Analyse von Klausurlösungen von Schülerinnen und Schülern der Experimental- und der Parallelkurse lässt hinsichtlich der Graphenerkennung und der Lösungsansätze deutliche Unterschiede zutage treten. Die weiteren Daten (aus Interviews und Heften) werden, auch wenn sie hier nicht eigens aufgeführt sind, punktuell zur Verdeutlichung und Überprüfung der Erkenntnisse genutzt.

Die Untersuchung der ausgewählten Unterrichtsepisoden und ihrer Transkripte erfolgte an Hand von Methoden der interpretativen Unterrichtsforschung. Dabei wurden ausschließlich Gesprächssituationen zwischen Schülerinnen und Schülern untersucht, da Gruppenarbeit und damit Gespräche zwischen Schülerinnen und Schülern die wesentliche Aktions- und Sozialform in diesem Unterrichtskontext darstellen. Es geht um die Analyse, auf welche Weise die Schülergruppen mit Hilfe des Unterrichtsmaterials sich neues Wissen erarbeiten und dabei prozessuale Fähigkeiten erwerben oder vertiefen. Einen ersten Zugang zu den ausgewählten Transkripte erfolgte mit Hilfe einer Turn-by-Turn-Analyse nach Voigt (1984a), wobei in der Abfolge des Gesprächs ein Gesprächszug nach dem anderen (jeweils ein „turn“) hinsichtlich möglicher Deutungen untersucht wird. Dabei geht es darum, die einzelnen Äußerungen zu verstehen, um auf dieser Grundlage den Werdegang des Gedankens nachvollziehen zu können. In einem weiteren Schritt wird die Episode in verschiedene Phasen gegliedert, um die Struktur und damit den Gesamtablauf des Gesprächs besser erfassen zu können (vgl. [Münzinger/Voigt 1988]). Im Anschluss daran werden die einzelnen Schritte im Lern- und Begriffsbildungsprozess unter Einbeziehen des epistemologischen Dreiecks nach Steinbring (2005) analysiert. Damit wird erschlossen, welche Bedeutung die jeweilige Handlung für die Begriffsbildung der interagierenden Schülerinnen und Schüler zum jeweiligen Zeitpunkt hat.

Bromme/Steinbring (1990) haben das aus der Sprachwissenschaft stammende Werkzeug für die Mathematikdidaktik adaptiert und nutzen es, um Begriffsbildungsprozesse im Mathematikunterricht besser verstehen und abbilden zu können. Ein wichtiges Merkmal dabei ist, dass in Anlehnung an den Sprachwissenschaftler De Saussure (2001) das Zeichen in zwei Komponenten wahrgenommen wird. Es ist Träger einer Bedeutung (Signifié, das Bezeichnete, die Vorstellung, die das Individuum mit dem Zeichen verbindet) und hat das Erscheinungsbild eines Ausdrucks (Signifikant, das Bezeichnende, das Lautbild, das Wort). Die jeweilige Bedeutung eines Zeichens entsteht durch Differenz zu anderen Zeichen und haftet nicht den Dingen und Sachverhalten der Realität an, sondern der jeweiligen Gedankenwelt des Einzelnen. Um den Prozess, wie mathematisches Wissen erworben wird, besser wiederspiegeln zu können, wurde von verschiedenen Theoretikern neben den genannten beiden Komponenten eine dritte hinzugefügt, die die Bedeutung der jeweiligen Äußerung für den Prozess der Generierung mathematischer Begriffe aufnimmt. So markierte Frege (1969) die Eckpunkte des epistemologischen Dreiecks mit „Zeichen, Sinn und Bedeutung“ und Ogden/Richards (1923) sprachen vom Dreieck der Bedeutung mit den Punkten „thoughts, words and things“. Steinbrings Modifikation „Zeichen, Begriff, Referenzkontext“ pointiert mit „Referenzkontext“ den jeweiligen individuellen Bezug, den der oder die Lernende setzt und zur Nennung eines bestimmten Zeichens veranlasst. Dabei betont Steinbring, dass die einzelnen Komponenten des epistemologischen Dreiecks nicht als unveränderlich und starr anzusehen sind, sondern im Begriffsbildungsprozess in einer stetigen Wechselbeziehung zueinander stehen. Gerade darin liegt Steinbrings Verdienst, dass ein epistemologisches Dreieck nicht als singulär zu begreifen ist, sondern als Teil eines Netzes vielfach verschränkter Dreiecke zu sehen ist, die sich im Fluss befinden. Steinbring schreibt dazu:

> *..the connections between the corners of the triangle are not explicitly defined and unchangeable. They form a mutually supporting system in*

> *which the interpretations of „object/ reference context", „sign/ symbol" and „concept" do not occur locally, but globally, by reciprocal actions within the system. In the course of further development of mathematical knowledge, the interpretation of the sign system with the matching reference contexts will change.* ([Steinbring 2005], S. 24)

Dieses Netzwerk verschiedener Dreiecke erhält seine Dynamik durch die kommunikativen Handlungen in der Interaktion. Dabei besteht eine reziproke Wechselwirkung zwischen Kognition und Kommunikation. Sie bedingen und beleben sich gegenseitig. Einerseits bedarf Kommunikation der Kognition, um nicht in Oberflächlichkeit und Tiefenlosigkeit zu verkümmern. Nur wo Kommunikation von Kognition getragen ist, hat sie Gehalt und Bedeutung für die beteiligten Individuen. Andererseits bedarf Kognition der Kommunikation des schriftlichen oder gesprochenen Wortes – und dies in dreierlei Hinsicht: Zum einen wird Kognition nur über Kommunikation sichtbar und erfahrbar. Zum anderen ist Kommunikation der einzige Weg, Erkenntnisse zu dokumentieren und zu archivieren. Und zum dritten – die wohl wichtigste Bedeutung – birgt die Kommunikation das Potenzial, dass sich Kognition ausschärft, sich erklären muss und zu neuer Tiefe reift. Hußmann sieht deshalb die kommunikative Leistung als Leistung im Sinne der Kognition an. Er führt dazu aus:

> *Dem Denken wird durch das Kleid der Sprache für den anderen ein anderer Ausdruck verliehen als es noch in der Sprache für einen selbst besaß und wirkt wieder zurück auf das Denken. Dabei ist nicht nur die Informationsverdichtung von Bedeutung, sondern durch das Verstehen der Mitteilungen Anderer entfalten bekannte Sachverhalte neue Bedeutungen, was zu neuer Erkenntnis führt.* ([Hußmann 2003a], S.63)

Auch Krummheuer/ Schreiber (2005) betonen das Wechselspiel zwischen individueller Bedeutungszuweisung und Interaktion:

> *Diese individuellen Interpretationen der Wirklichkeit entwickeln sich nicht unabhängig von den anderen Beteiligten der Interaktion gleichsam im „stillen Kämmerlein" des Individuums. Vielmehr ist der je individuelle Entwicklungsprozess gewissermaßen eine Koproduktion der Teilnehmer der Interaktion: Die Individuen beeinflussen sich im Miteinander gegenseitig in ihren Deutungen. Es findet ein Prozess der „Bedeutungsaushandlung" statt. (⋯)Die Bedeutung zu einem Ding wird unter interaktionistischer Perspektive in der Interaktion ausgehandelt. Dies geschieht in Prozessen sozialer Interaktion, in denen auf semantischer Ebene Verständigungen und daraus resultierende Kooperationen emergiert.* ([Krummheuer/Schreiber 2005], S.21)

Die kommunikativen Handlungen bilden somit ein Tor, die kognitiven Aktivitäten der Schülerinnen und Schüler wahrzunehmen. Diese Aktivitäten sind es, die im Zentrum des Forschungsinteresses beim hier beschriebenen Projekt stehen. Um die ausgewählten Episoden hinsichtlich der kognitiven Tätigkeiten und ihrer Bedeutung für den Lern- und Begriffsbildungsprozess der Schülerinnen und Schüler noch pointierter erfassen zu können, wurde dem epistemologischen Dreieck die zusätzliche Komponente „Kommunikative Handlung“ beigefügt, die Trias sozusagen zur Quadrias erweitert.

Das so entstandene epistemologische Geflecht liefert in einer Gesprächssituation einer Kleingruppe von Schülerinnen und Schülern, bei der die Komplexität durch verschiedene Assoziationsstränge und Vorstellungen und auch durch zu erwartende Nebenhandlungen erhöht wird, ein Werkzeug, um die verschiedenen Stadien der Begriffsbildung zu konturieren. Dabei kann vor allem der Prozess der Begriffsbildung in Abhängigkeit von der jeweiligen Art der Interaktion dargestellt werden. Die Analyse der Gespräche eröffnet auf diese Weise Zugang zu den vielfältigen Möglichkeiten an Gedanken und Deutungen und gibt eine Fülle an Hinweisen, welche Chancen und Schwierigkeiten beim Erlernen der hier relevanten Begriffe auftreten können. Damit sprengen diese Analysen den Rahmen der singulären Situation und bieten Erkenntnisse, die auch in anderen Kursen und Lernarrangements nützlich sein können.

8.2.3 Die quantitative Studie

Die Erfahrungen im Rahmen der Pilotierung sowie der Begleitung des einen Kurses waren grundlegend für die Konzeption der quantitativen Studie. Ziel der quantitativen Studie ist es, die Erfahrungen einer Vielzahl von Lehrpersonen und entsprechenden Schülergruppen in die Evaluation einzubeziehen. Damit wird auch gleichzeitig die Übertragbarkeit des Materials getestet, inwieweit auch andere Lehrpersonen es adäquat nutzen können.

Über einen Aufruf im Newsletter des Lehrerfortbildungsprojektes T^3 [4], den zum Zeitpunkt des Aufrufs ca. 1500 Lehrpersonen erhielten, meldeten sich insgesamt 45 Lehrpersonen mit 50 Kursen (teils haben die Lehrpersonen mehr als einen Kurs unterrichtet), die sich bereit erklärten, die Lernwerkstatt im 11. Jahrgang im Schuljahr 2003/2004 einzusetzen. Diese Lehrpersonen

[4] T^3 steht für „Teachers Teaching with Technology“ und ist ein Lehrerfortbildungsprojekt zum Einsatz neuer Technologien im mathematisch-naturwissenschaftlichem Unterricht, das von der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster aus koordiniert wird.

wurden keiner weiteren Befragung vor der Auswahl unterzogen. Das Material wurde ihnen zugeschickt und sie wurden gebeten, die Online-Befragung am Ende der Lernwerkstatt durchzuführen und den Schülerinnen und Schüler einen Abschlusstest zu stellen.

Online-Befragung

Mit Hilfe der Online-Befragung konnten einerseits die Lehrpersonen und andererseits die Schülerinnen und Schüler ihre Erfahrungen unmittelbar nach Beendigung der Lernwerkstatt im jeweiligen Unterricht rückmelden. Bei beiden Fragebögen wurde das Programm *Grafstat* genutzt, um die Fragebögen zu erstellen, im Internet zur Beantwortung zu veröffentlichen und um die Daten der Beantwortung zu sammeln. Der Rücklauf dieser Befragung belief sich auf 578 Schüler- und 18 Lehrerfragebögen. Zur weiteren statistischen Auswertung wurden die Daten dann in das Programm *SPSS* übertragen. Die Methode der Auswertung erfolgte je nach Antwortformat und Inhaltsbereich auf verschiedene Weise. Dies sind im Wesentlichen:

- **Items mit Ratingskalen**: Bei den Items mit Ratingskala wurden Häufigkeiten einzelner Items sowie Zusammenhänge zwischen einzelnen Items näher untersucht und ausgewertet.
- **Freie Anmerkungen**: Die freien Äußerungen wurden nach Untersuchungsschritten der grounded theory bearbeitet – zunächst kodiert, geclustert und ausgewertet.
- **Mehrfachnennungen**: Items, bei denen als Antwort Mehrfachnennungen möglich waren, wurden als dichotomisierte Daten erhoben und diese zueinander und zu anderen ermittelten Daten in Beziehung gesetzt.

Abschlusstest

Der Abschlusstest rundete im Sommer zum Ende des Schuljahres 2003/2004 den quantitativen Teil der Studie ab (Aufgabenblatt im Anhang C). Er bestand aus zwei Aufgaben, die zentralen NRW-Vergleichsklausuren vergangener Jahre[5] entnommen waren (vgl. Anhang C). Durch die Übernahme von

[5] Die erste Aufgabe entsprach Aufgabe 2 aus 2002 und die zweite Aufgabe der Aufgabe 2 aus dem Jahr 2001. Vgl.
http://www.brd.nrw.de/BezRegDdorf/hierarchie/lerntreffs/mathe/structure/sekundar2/vergleichsarbeiten.php, Stand: 4.1.2006

Aufgaben aus zentralen Klausuren wurde eine von außen gestellte Anforderung als Maßstab gewählt. Zum Vergleich der Ergebnisse der Experimentalgruppe mit denen anderer Gruppen lagen die Mittelwerte der erreichten Punktzahlen vor, die in den jeweiligen Jahren in NRW erzielt wurden. Die Mittelwerte bezogen sich für die Aufgabe aus dem Jahr 2001 auf die Ergebnisse von 12169 Schüler/innen (2.Aufgabe) und für die Aufgabe aus dem Jahr 2002 auf 11364 Klausurergebnise (1.Aufgabe). Das Aufgabenblatt zum Test wurde den Lehrpersonen in der benötigten Kopienanzahl incl. eines freien Rückumschlags zugesandt. Die Lehrpersonen stellten ihren Schülerinnen und Schülern den Test und sandten die Aufgabenblätter ohne Korrektur zurück. Die Korrektur des Tests erfolgte zentral an der Universität Duisburg-Essen durch fortgeschrittene Lehramtsstudierende. Dabei wurden die gleichen Kriterien zugrunde gelegt, die mit den Vergleichsklausuren zentral den Lehrpersonen vorgegeben waren. Der Rücklauf des Abschlusstests belief sich auf 462 Klausuren. Dieser Test wurde in keinem der Kurse als Klausur bewertet, sondern von Lehrenden und Lernenden nur als Abschluss der Teilnahme am Projekt gesehen. Um die Motivation zu einer konzentrierten Bearbeitung zu erhöhen, wurde den Schülerinnen und Schülern angeboten, dass ihnen der Test korrigiert zurückgesandt wird.

Kapitel 9

Auswertung der qualitativen Studie

> *Die begründete Hoffnung besteht also darin, dass in geeignet organisierten lebendigen Lernprozessen zugleich fachliches wie auch die Entwicklung außerfachlicher und übergreifender Fähigkeiten so angestoßen werden, dass die Effekte sich gegenseitig verstärken.* ([Hefendehl-Hebeker 2004b], S.17)

9.1 Transkriptanalyse „Legespiel – Was gehört zusammen?“

Die hier analysierte Unterrichtssequenz bezieht sich auf eine Gruppenarbeit von drei Schülerinnen (P, U und A) und einem Schüler (C), die am Legespiel aus Baustein Z („Was gehört zusammen?“, vgl. Seite 34) arbeiten. Dabei finden die Schülerinnen und Schüler 13 Legeteile mit jeweils einem Graphen vor und die Fragestellung lautet: „Welche Graphen f, f´ und f´´ gehören jeweils zusammen?“ Es sind also vier Legeteile zu viel dabei, die nicht zugeordnet werden können. Im Rahmen der betrachteten Sequenz werden zwei Sets richtig erkannt.

Zunächst werden die allgemeinen Merkmale und eine mögliche Strukturierung des Gesprächs vorgestellt (Kapitel 9.1.1), bevor die einzelnen Phasen entsprechend der in Kapitel 9 dargelegten methodischen Schritte detailliert analysiert werden (Kapitel 9.1.2).

9.1.1 Merkmale und Struktur des Gesprächsverlaufs

Zu Beginn der betrachteten Sequenz haben die drei Schülerinnen und der Schüler die Legeteile bereits nach dem Grad der Funktionen sortiert. Abbildung 9.1 zeigt das Bild, das sich den Schülerinnen und Schüler bietet. Die Tatsache, dass die Graphen bereits vorsortiert sind, ist deshalb hervorzuheben, da das Analysieren von Graphen ganzrationaler Funktionen vom Grad größer als zwei im bisherigen Unterricht nicht behandelt worden war. Allerdings war das Betrachten und Analysieren von Graphen hinsichtlich maximaler Anzahl von Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen Inhalt von Baustein L der Lernwerkstatt (vgl. Seite 26), der deshalb auch als Voraussetzung für dieses Legespiel gefordert war. Das Sortieren der Graphen lässt darauf schließen, dass diese Aufgabe der Lernwerkstatt von der Schülergruppe insofern erfolgreich bearbeitet wurde, da die Klassifizierung von Graphen nach Funktionen verschiedenen Grades gelingt.

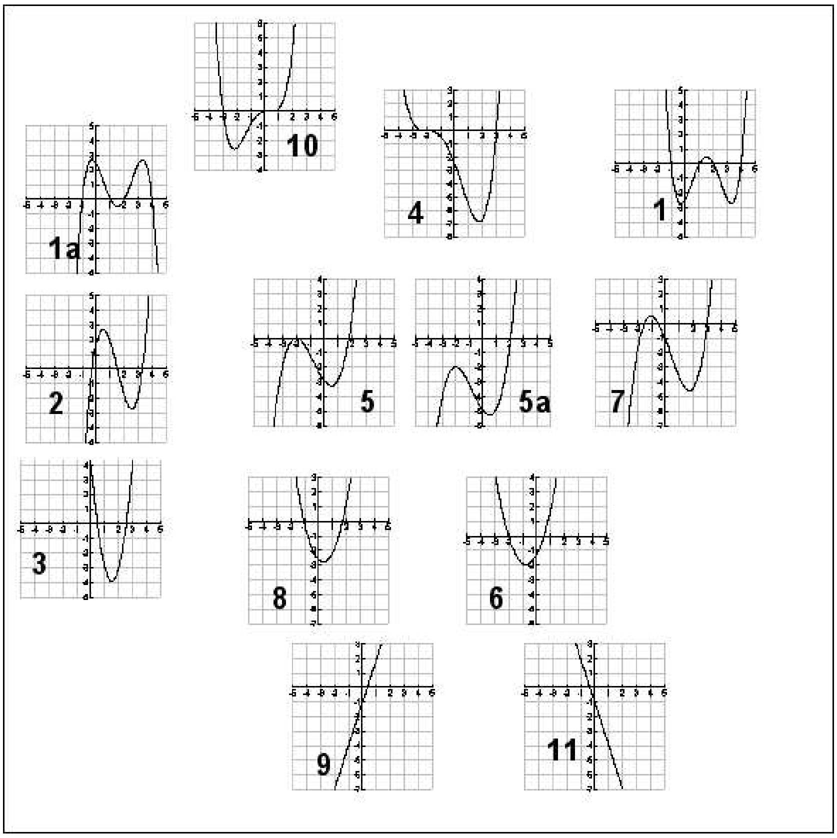


Abbildung 9.1: Anordnung der Legeteile bis Zeile 53

Obwohl eine Gruppenarbeit von vier Personen dokumentiert ist, sind doch zwei deutliche Protagonistinnen bei der beobachteten Sequenz auszumachen - U und P, die größtenteils einen Dialog führen. C ist stiller Beobachter und befindet sich in der räumlichen Sitzordnung am Rande. Dennoch scheint er am Geschehen beteiligt, auch er überhört wie die Mitschülerinnen den Gong, beugt sich weiterhin zum Geschehen und bleibt in der Situation. Er ist es auch, der zu einem späteren Zeitpunkt eine inhaltliche Frage an die Lehrperson richtet. A hält sich ebenfalls zurück, spielt aber deutlich die Rolle einer kritischen Beobachterin. Sie ist einerseits körperlich präsenter als C, beugt sich weit auf den Tisch mit den Legeteilen und zeigt durch vereinzelte Kommentare und Verschieben der Legeteile ihre gedankliche Beteiligung am Geschehen. Die aktiveren Parts überlässt sie jedoch größtenteils den beiden anderen Mitschülerinnen U und P. Dabei ist P Hauptmotor des Geschehens und gibt immer wieder neue Impulse. Trotz fachlicher Unsicherheiten wird sie nicht passiv, sondern setzt diese in Fragen und Impulse an die Mitschülerinnen um. Das Bild der Situation (Abbildung 9.2) mag einen ersten Eindruck vermitteln.

Abbildung 9.2: Die Gesprächssituation

Der gesamte Gesprächsverlauf ist bestimmt durch zwei grundsätzlich verschiedene Strategien zur Lösung. P geht eher von einer globalen Betrachtungsweise aus, da sie den Verlauf und die Steigung einzelner Graphikbereiche immer wieder ins Zentrum ihrer Aufmerksamkeit rückt. Ihre Äußerungen lassen auf eine eher dynamische Repräsentationsweise schließen und sind häufig mit entsprechenden dynamischen Handbewegungen untermalt.

P: Wir hatten ja gerade gesagt man kann die nach oben verschieben einfach es geht

2 nur um den Verlauf / Es geht nicht unbedingt ... darum ob

U dagegen denkt durchgängig hauptsächlich lokal, sie betrachtet und zeigt auf exponierte Punkte (vor allem Extrempunkte), die ihr Rückschlüsse auf besondere Punkte bei den jeweils passenden Graphen erlauben (Nullstellen von f´ - Extremstellen von f). U fasst die punktuellen Eigenschaften der Graphen auf und setzt sie in einer eher statischen Weise zueinander in Beziehung. Ihre Handbewegungen sind meist ein Zeigen auf einzelne Punkte. Das Statische scheint somit auch in ihrer internen begrifflichen Repräsentation des Sachverhalts Vorrang zu haben.

48 U: Da haben wir hier einen Extrempunkt bei ... / null komma ... *zeigt auf K1*

Diese beiden konkurrierenden Sichtweisen der beiden Schülerinnen prägen das Gespräch und verleihen ihm Spannung, da der jeweils andere Zugang immer wieder zum Hinterfragen des Sachverhalts Anlass gibt und letztlich zu einer Erweiterung der individuellen Sichtweisen führt. Wo am Anfang noch beide Zugänge eher disparat nebeneinander stehen, intensiviert sich im Laufe des Gesprächs das gegenseitige Verarbeiten und Durchdringen der anderen Sichtweise und es werden beide Kriterien angewandt, um die Zusammengehörigkeiten von Graphen zu testen, zu verifizieren oder zu falsifizieren. Dies führt zu einem wachsend intensiveren Austausch und einem gezielten Erklären und Argumentieren. Dies gelingt immer besser, die Kommunikation wird intensiver und es werden Fehlvorstellungen korrigiert, was darauf schließen lässt, dass die fachlichen Aspekte immer besser verstanden und vertieft werden.

Dabei lassen sich drei Phasen der Gesprächssequenz ausmachen:

1. **Disparat erfassen** (bis Zeile 42) Diese Phase ist geprägt durch assoziatives Suchen nach geeigneten Kriterien, die Zusammengehörigkeit von Graphen zu prüfen. Dabei folgen U und P jeweils eigenen Gedanken, die angedeutet werden und vage formuliert sind. Sie scheinen noch unvereinbar. Trotz dieser verschiedenen Gedanken zu Lösungswegen ist die Kommunikation aufeinander gerichtet. Dies geschieht jedoch über Gesten und verbale Floskeln, nicht durch komplett formulierte Gedankenzüge.

2. **Miteinander erkennen** (Zeilen 44 – 94) Die beiden Schülerinnen bringen ihre Sichtweisen zusammen. Die Kommunikation wird intensiver aufeinander gerichtet und ist mehr vom Zuhören und Verarbeiten der Gedanken der anderen geprägt. Das erste Set von drei Graphen wird erkannt.

3. **Gemeinsam anwenden** (ab Zeile 95) In dieser dritten Phase wirken beide Schülerinnen sicherer, die Zusammengehörigkeit von Graphen zu beurteilen. Das Festigen und Verstehen der Lösungsstrategien geht damit einher, sich auf die Herangehensweise der jeweils anderen einzulassen, sie einzubeziehen. Dies führt letztlich dazu, dass das zweite Set gefunden wird.

Die untersuchte Sequenz endet, als das zweite Dreier-Set an Graphen gefunden ist. U regt an, dass C und A das dritte Set suchen sollen. Diese beiden nehmen diese Aufforderung an, entfernen sich aber bewusst von der Kamera, da sie ihre Lösung nicht in der Film-Situation vollziehen möchten.

9.1.2 Analyse der einzelnen Phasen

Nach Hußmann (2003a) ist Sprechen ein Zuweisen von Bedeutungen und zwar vor dem individuellen Erfahrungshorizont. Im Verlauf von Kommunikation können sich diese Bedeutungen verändern. Spannung erhält dieser Prozess dadurch, dass man bestrebt ist, die potentiellen Differenzen zwischen den Äußerungen des Gegenübers und der eigenen innernen Vorstellung andererseits zu überwinden.

Die gewählte Methodie des erweiterten epistemolgischen Dreiecks (vgl. Seite 140) stellt ein Instrument dar, diese Prozesse besser darzustellen und nachvollziehen zu können. Dazu werden die einzelnen Schritte des Gesprächs unter folgenden Fragen untersucht:

- Wie ist die Äußerung im Rahmen der Kommunikation zu sehen?
- Auf welchen Referenzkontext bezieht sich die Äußerung?
- Hat die jeweilige Äußerung eine erkennbare Auswirkung auf den Begriffsbildungsprozess einer der Beteiligten? Sind besondere Präferenzen oder Fehlvorstellungen zu erkennen?

An Hand dieser Leitfragen wurden der Ablauf des gesamten Gesprächs untersucht und die einzelnen Ergebnisse tabellarisch erfasst (vgl. im Anhang Tabellen F.1 bis F.3). Um die Bedeutung der einzelnen Äußerung für den Begriffsbildungsprozess beider Akteurinnen besser beurteilen zu können, wurde die Funktion der Äußerung im Rahmen der kommunikativen Handlung bestimmt. Dazu wurden die Redebeiträge in drei Grobkategorien klassifiziert:

1. **Assoziation**: Dazu gehören alle assoziativen Äußerungen, zum Beispiel erste Ideen, die noch sehr bruchstückhaft und unausgereift sind. Ansätze von Begründen und gezieltes Eingehen auf die anderen Beteiligten sind nicht zu erkennen. Diese assoziativen Äußerungen wurden weiterhin unterschieden, inwieweit es sich um eine auf die Gesprächspartnerin gerichtete Äußerung oder eher um ein lautes Denken „für sich selber" handelt.

2. **Argumentation**: Hierunter werden alle Beiträge der Schülerinnen gefasst, die bereits Merkmale einer Begründung oder Erklärung aufweisen. Dies sind sowohl einzelne Gedanken als auch längere Gedankenschritte. Die Beiträge sind auch bereits als Reaktion auf die Gesprächspartnerin zu deuten. Es wurde zudem aufgenommen, ob der Redebeitrag durch eigene Vorstellungen oder Vorstellungen der anderen geprägt ist.

3. **Ergebnis**: Dies sind die Beiträge, in denen die Schülerinnen ein Ergebnis festhalten, es wird die Zusammengehörigkeit zweier Graphen oder eines ganzen Sets erkannt und benannt. In dieser Sequenz werden die Ergebnisse stets gemeinsam formuliert – sind nicht explizit einer der Gesprächspartnerinnen zuzuweisen.

Insgesamt enstanden so die folgenden Kategorien und Kürzel für die verschiedenen Arten der kommunikativen Handlung im Rahmen dieser Sequenz (vgl. im Anhang Tabellen F.1 bis F.3):

- I – **I**soliert dastehende, von anderen unabhängige, assoziative Äußerung
- G – eine auf den anderen **G**erichtete, assoziative Äußerung
- AE – **A**rgumentative Äußerung, die hauptsächlich durch den **E**igenen Gedankengang geprägt ist
- AA – **A**rgumentative Äußerung, die durch die Vorstellungen und Äußerungen der **A**nderen beeinflusst ist
- Z – **Z**usammen formulieren

Ein Zusatz (U) oder (P) bezeichnet die jeweilige Akteurin.

Erste Phase: Disparat erfassen

Die erste Phase ist davon geprägt, dass die Schülerinnen eigene Gedanken und Strategien verfolgen, die noch unvereint nebeneinander stehen bleiben. Diese Gedanken werden nur unscharf geäußert und vage formuliert. Trotz dieses Nebeneinanders gibt es eine Form der Kommunikation als gemeinsames Suchen und Vortasten. So versucht U – gleich zu Beginn der Sequenz – P weiterzuhelfen, um eine irrtümlich festgestellte Zusammengehörigkeit von Graphen zu korrigieren. Dabei werden die Graphen auf den Karten K1a, K2 und K3 betrachtet, die untereinander am linken Rand auf dem Tisch vor den Schülerinnen liegen. Abbildung 9.2 zeigt das Bild, wie es sich den Schülerinnen bietet.

P: dass diese drei so zusammen passen *zeigt auf K1a, K2 und K3 , zu U gewandt*
U<: ja aber... dann nur der Verl ... *zeigt auf K4*
P<: Nur dass fallend und steigend nicht... \
U: Ja aber wenn du aber wenn du auf den jetzt hier guckst - *zeigt auf K4*
P: Wir hatten ja gerade gesagt man kann die nach oben verschieben einfach es geht nur um den Verlauf / Es geht nicht unbedingt ... darum ob
U<: Ja aber -

Eine mögliche Deutung ist, dass die Schülerinnen den Zusammenhang zwischen den drei Karten K1a, K2 und K3 bezüglich der markanten Punkte (z.B. Nullstellen im Graphen zu f´ – Extremstellen im Graphen zu f) erkannt haben und P nun auffällt, dass es Unstimmigkeiten gibt, da die Art der Steigung des Graphen von f nicht zu den entsprechenden Werten bei f´ passt. P betont dabei den Aspekt, dass es „nur um den Verlauf geht“ und man den Graphen beliebig nach oben und unten verschieben kann. Sie assoziiert offensichtlich (Zeile 5) ein „graphisches Auf- bzw. Ableiten“. Ein möglicher Referenzkontext könnte eine Aufgabe aus Baustein C sein (vgl. Seite 33), bei der zu einem Graphen von f´ mehrere mögliche Graphen zu f gegeben sind. U macht mehrere Anläufe zur Erwiderung (vgl. Zeilen, 2,4,7 und 10) und hat erst beim vierten Versuch (Zeile 10) Erfolg. Offensichtlich will sie P etwas erwidern und scheint dennoch parallel bereits einem neuen Gedanken zu folgen, der ihre Aufmerksamkeit auf eine neue Karte (K4) lenkt. Obwohl sie ihre Erklärung für P auf diesen neuen Graphen (K4) bezieht und nicht auf die Graphen, die P noch fokussiert, trifft U offenbar mit ihrer Äußerung (Zeile 10) P´s Gedanken, so dass diese Einsicht zeigt („Ja, stimmt“):

U: Ja aber trotzdem ... auch wenn ... *zeigt auf K4* aber du kannst es ja verschieben *Schwingbewegung in y-Richtung mit der Hand* wie du willst es bleibt immer im negativen Bereich *zeigt auf K4, x>0* wenn es im negativen Bereich ist \
P: Ja stimmt die Steigung muss im negativen Bereich sein deswegen

Auch wenn U nicht den Referenzkontext von P teilt, benutzt sie bei ihrem Einwurf eindeutig P´s Äußerung des Verschiebens, greift also P´s Worte auf und knüpft daran ihre Erklärung. Dieser Impuls reicht P zu erkennen, dass die Graphen K1a und K2 nicht zusammen gehören können. Für P findet dadurch eine Korrektur oder Ergänzung ihrer mentalen Vorstellung statt.

Die anschließenden Redebeiträge in dieser ersten Phase sind sehr bruchstückhaft und suchend. Keine der Schülerinnen verfolgt einen klaren Gedanken, sondern es werden assoziativ Ideenansätze geäußert. P ist in dieser ersten Phase am aktivsten und setzt immer wieder neue Impulse, die vor allem an U gerichtet sind. Ihr Reden wirkt eher wie lautes Denken und scheint insbesondere die Funktion zu haben, die eigenen Gedanken zu ordnen. Trotz der aktiven Rolle in dieser Phase wirkt sie unsicher, zweifelnd und orientiert sich stets an U, sucht deren verbale und nonverbale Zustimmung.

Für P´s begriffliche Vorstellungen sind zwei Aspekte wichtig, die in dieser ersten Phase zu erkennen sind:

1. Sie geht davon aus, dass die „Punkt-Strategie“ nicht zum Erfolg führt. In Zeile 45f sagt sie: „ . . . mit den Extrempunkten haben wir uns gerade vertan“ und will diese deshalb auch nicht mehr als Ausgangspunkt der Betrachtung wählen. Dabei bezieht sie sich auf die Karten K1a, K2 und K3. Diese drei Graphen passen zwar von den markanten Punkten her zusammen, jedoch zeigt die Karte K1a einen an der x-Achse gespiegelten Graph zum richtigen Graph (K1), so dass das Steigungsverhalten nicht zum Graphen auf K2 für die Ableitungsfunktion passt.

2. Sie scheint in Zeile 14 („Ja stimmt die Steigung muss im negativen Bereich sein“) aufgrund U´s Äußerung den Zusammenhang zwischen Steigungsverhalten im Graphen zu f und den Funktionswerten im Graphen von f´ richtig zu verstehen. Dies wird auch im Folgenden in den Zeilen 22 – 24 und 35f deutlich, die auch als Festigen dieser Erkenntnis gesehen werden können.

U propagiert deutlich und klar die Punkt-Strategie. Die Steigungs-Strategie scheint ihr nicht vertraut. So ist bereits unklar, was sie wirklich meint, wenn sie in Zeile 11f äußert: „ du kannst es ja verschieben . . . wie du willst es bleibt immer im negativen Bereich . . . wenn es im negativen Bereich ist“. Einerseits könnte es darum gehen, dass sich die Steigung durch das Verschieben nicht verändert, was mathematisch korrekt wäre, wenn sich das Verschieben ausschließlich auf die y-Richtung beziehen würde. Andererseits könnte sie aber auch die Funktionswerte meinen, die beim Verschieben im negativen Bereich bleiben. Dies wäre nur bei einem Verschieben in negative y-Richtung korrekt.

Zweite Phase: Miteinander Erkennen

Die Sprache in der zweiten Phase hat sich sowohl von der Grammatik als auch von der Wortwahl gegenüber der ersten deutlich gewandelt. Sie ist stringenter und flüssiger, die Kohärenz der argumentativen Aspekte steigt. Dies geht einher mit einer wachsenden Intensität der Kommunikation zwischen U und P, die von einem gegenseitigen Zuhören und Aufgreifen der Gedanken der anderen geprägt ist. So sind mehr Redebeiträge der Kategorie „AA“ zuzuordnen, dabei steht „AA“ für „argumentative Äußerung, die Ideen der Anderen nutzend“. So geht U in Zeile 47 gezielt auf P´s Bedenken bezüglich der Punkt-Strategie ein und verifiziert in einem langen Redebeitrag die Zusammengehörigkeit der Karten K1 und K2. Dabei benutzt sie sowohl die ihr vertraute Punkt-Strategie wie auch die Steigungs-Strategie. Sie wirkt dabei sehr sicher und gibt ihre Erklärungen mit Überzeugung. Durch ihre schlüssige Ausführung gibt sie dem Lösungsprozess neuen Schwung.

P: Wir können echt ... mit den Extrempunkten haben wir uns gerade vertan lass uns erst mal gucken

U<: nee das kannst du aber ganz genau sagen \ hier *zeigt mit ihrer linken Hand auf K1* bei null komma fünf *zeigt mit ihrer rechten Hand auf K2* so dann hast du hier *zeigt mit ihrer linken Hand auf K1* noch mal einen bei eins komma fünf haste hier *zeigt mit ihrer rechten Hand auf K2* auch ... und haste einen *zeigt mit ihrer linken Hand auf K1* ... da auch *zeigt mit ihrer rechten Hand auf K2* bei drei komma irgendwas ... alleine von den Extrempunkten würde das schon mal passen \ *legt K1 unter K1a* Dann ist der jetzt hier... fällt ... fallend *zeigt auf K1 mit gerader Bewegung von oben nach unten* hier auch fallend *zeigt auf K2 mit gerader Bewegung von unten nach oben* dann ist der da steigend *zeigt auf K1 mit gerader Bewegung von unten nach oben* hier auch steigend *zeigt auf K2 mit bogenförmiger Bewegung* \ ist der da / *zeigt nacheinander auf: K1 K2 K1 K2*... so dann fällt der wieder *zeigt auf K2, x>2* ... und dann fällt er wieder und dann steigt er *zeigt auf K1 mit gerader Bewegung nach oben*...

Trotz der anscheinenden Eloquenz ihrer Argumentation ist eine Unsicherheit und eventuelle Fehlvorstellung zu erkennen: Die Verbindung „Hier fallend - da fallend“ in Zeile 53 (wobei mit „hier“ und „da“ die Graphen von f und f´ gemeint sind) scheint darauf hin zu weisen, dass sie das Steigungsverhalten von f analog zu dem von f´ sieht. Dabei passen die Worte und Handbewegungen bezogen auf den Graphen auf Karte K2 nicht zusammen. Sie geht salopp über diese Inkonsequenz hinweg, zögert aber danach im Redefluss. Die Bewegungen und Worte, die unmittelbar folgen, können sowohl gesehen werden als weitere Hinweise auf die bestehende Fehlvorstellung oder als erste Boten einer Korrektur. Im letzten Fall ließe sich die bogenförmige Bewegung auf K2 bei den Worten „hier auch steigend“ (Zeile 58) als Beschreibung des x-Bereichs zwischen -0.5 und 1.5 sehen. Die zugehörigen y-Werte sind dort positiv und hier ist der Graph K1 steigend. Einen sicheren Hinweis auf eine Korrektur findet sich in den Zeilen 83f, wo sie sich im Rahmen der Äußerung unmittelbar selbst verbessert:

82 U: Hier ist er steigend *zeigt auf K1 x>0* und deswegen ist er ja auch hier *zeigt auf K2*
83 steigend ... wieder im positiven Bereich

Als Referenz für diese Selbst-Korrektur von U kann der Beitrag von P in Zeile 66ff gesehen werden, der kurz vorher geäußert wurde und wo P den Zusammenhang zwischen Steigung des Graphen von f und Funktionswerten von f´ anwendet und dabei deutlich erklärt:

66 P: Der Graph fällt \ *zeigt auf K1*... also ist die S t e i g u n g im negativen Bereich also
67 ist die ... er fällt also muss ... y im negativen Bereich sein bei der zweiten Ableitung
68 ... *zeigt auf K2*
69 U: *zeigt auch auf K2* ( ) dann is er hier ...
70 P: bei null ... *zeigt auf K2* Genau
71 P: Dann steigt er ... *zeigt auf K2*
72 P: Stimmt ja auch ...
73 U: die beiden stimmen ...

Trotz dieser Korrektur von U blitzt kurze Zeit später ihre Unsicherheit wieder auf – wohl ausgelöst durch P´s Verwechseln von f und f´, was neue Verwirrung stiftet und zeigt, dass U´s Korrektur noch nicht manifest ist. Beide Schülerinnen gehen jedoch über diese Ungereimtheiten hinweg. Der Unsicherheit wird keinen Raum gegeben, vielmehr die Unschärfe nivelliert. Man ist von dem unausgesprochenen Arbeitskonsens (vgl. [Krummheuer/Schreiber 2005], S.23) getragen, es argumentativ passend zu machen, um der Lösung schneller näher zu kommen. Deshalb darf das Problem nicht komplizierter sondern muss klarer werden. Auch wenn hier über die Unsicherheit hinweggegangen wird, findet sich später in der dritten Phase ein weiterer Beleg dafür, dass U ihre Fehlvorstellung letztlich korrigiert hat (Zeile 113f).

Die Zeilen 66-68 zeigen noch einen weiteren interessanten Aspekt – bezogen auf die kommunikative Handlung. U und P formulieren gemeinsam, die eine führt den begonnenen Satz der anderen fort. Dadurch wird das Miteinander in der Erkenntnisfindung explizit. Dieses „Miteinander denken“ führt auch leichter dazu, dass sie über sprachliche Ungenauigkeiten hinweg hören und dennoch verstehen, was die andere meint. So werden die negativen Vorzeichen einzelner Stellen mehrmals nicht genannt, obwohl man sich eindeutig auf negative Stellen im Graphen bezieht, was auch offensichtlich von allen richtig verstanden wird. Ähnlich ist dies, wenn P die Karte K2 als „zweite Ableitung“ und Karte K1 als „erste Ableitung“ bezeichnet, obwohl aus dem Kontext hervorgeht, dass sie f und f´ meint. Das korrekte Formulieren der Details hat an diesen Stellen keine Bedeutung für das gegenseitige Verstehen der inhaltlichen Aussage. Die eine weiß einfach, was die andere meint und versteht das Richtige, da man den Gedanken folgt und nicht den Worten.

P lässt sich in dieser zweiten Phase auf die Punkt-Strategie ein und wendet sie sogar selbst an (Zeilen 60 – 63):

P: Hier wäre ein Wendepunkt bei null \ *zeigt auf K2, erst auf Mitte, dann nach rechts und links*
U: wieder das stimmt sogar \
P: **Hier** wäre ein Wendepunkt und da ein Wendepunkt *zeigt auf K2* Also/ ...
U<: *murmelt ( )*
P: Ganz langsam war zu schnell
P: Der Graph fällt \ *zeigt auf K1*... also ist die S t e i g u n g im negativen Bereich also ist die ... er fällt also muss ... y im negativen Bereich sein bei der zweiten Ableitung ... *zeigt auf K2*

Jedoch erzwingt sie selbst einen Stopp (Zeile 52) zur Reflexion und wendet daraufhin „ihre“ Strategie der Steigungsbetrachtung an, um die Zusammengehörigkeit der Graphen zu prüfen. Wie im folgenden Kapitel näher erläutert, führt die wachsende Verzahnung der beiden Strategien zum Finden des ersten Sets an zusammengehörigen Graphen. Erschwerend für P´s Erkenntnisprozess ist, dass sie anscheinend dazu neigt, das Schliessen von f auf f´ mit dem Schließen von f´ auf f zu verwechseln. Das führt sogar im Laufe der Sequenz dazu, dass aufgrund dieser Verwechslung ein eigentlich richtiges Paar von Graphen (K4 und K5) wieder getrennt wird, ohne dass die anderen Mitschülerinnen das monieren (Zeile 177f).

Dritte Phase: Gemeinsam Anwenden

Die dritte Phase zeichnet sich durch einen hohen Grad an Kommunikation aus. Die Gedanken werden zunehmend besser und ausführlicher artikuliert, aber auch das „Zusammen denken“ ist sehr intensiv. Auch hier ist es noch so, dass Fehler im Sprachlichen gemeinsam übergangen und sogar übernommen werden, obwohl eindeutig das Richtige gemeint ist. So wird zum Beispiel fortwährend die Stelle *(- 2)* im Graphen K4 mit *(2)* bezeichnet. Es scheinen beide Kriterien – sowohl Betrachten des Steigungsverhaltens wie auch markanter Punkte – gefestigt und die neuen Erkenntnisse und Einsichten werden auf die Untersuchung weiterer Graphen übertragen. Bevor ein Set von drei Graphen als zusammengehörig erkannt wird, werden beide Kriterien zur Überprüfung kontrolliert. Die eigene Unschärfe in den Formulierungen wird dabei zunehmend geglättet. Das Festigen und Verstehen scheint einher zu gehen mit dem Einlassen und Einbeziehen der Vorstellung und Herangehensweise der anderen. Dabei ist das Einbeziehen jedoch erst dann möglich, wenn sich eine gewisse Grundsicherheit bereits entwickelt hat.

U: Gucken wir ob der stimmt und null . . . \ guck mal ob der stimmt *zeigt auf K4* . . . Fallend bis zwei . . . danach wieder fallend bis eins komma neun . . . *zeigt auf K5 im positiven x-Bereich* Ja

P<: hmmhm \ *gerade Bewegung am Graph K4 entlang nach unten* ja dann steigt er müsste er im positiven Bereich sein . . .

U: Ja dann steigt *zeigt auf K4* . . . dann steigt er . . . müsste er hier schon wieder im positiven Bereich sein *zeigt auf K5*

Am Ende der Sequenz wird das zweite Set zusammengehöriger Graphen erkannt. P scheint danach Spaß daran zu finden, auch noch das dritte Set zu ermitteln und ist enttäuscht, als U diesen letzten Schritt bewusst an C abgibt. Dieser nimmt zusammen mit A die Aufforderung an, geht aber bewusst aus der Film-Situation heraus, weshalb hier die Transkription endet und offen bleibt, welche Erkenntnis A und C durch die Beobachtung des Lösungsprozesses von U und P gewinnen konnten. Interessant ist, dass U ihren Mitschüler C erst dann einbezieht, nachdem die eigenen Unsicherheiten überwunden worden sind. Zum einen scheint erst dann die Zeit, den anderen überhaupt in den Blick zu nehmen und wird die Rollenverteilung innerhalb der Gruppe von allen akzeptiert.

Da die Dynamik des Gesprächs wesentlich von den beiden Strategien, die Zusammengehörigkeit entweder durch eine Punkt- oder eine Steigungsbetrachtung zu finden, wird in einem folgenden Kapitel dieser Aspekt noch einmal eigens beleuchtet.

9.1.3 Untersuchung hinsichtlich der unterschiedlichen Lösungsstrategien

Die beiden konkurrierenden Sichtweisen im Dialog weisen Merkmale auf, wie sie bereits mehrfach in der Mathematikdidaktik beschrieben wurden. So hat Schwank (1996) aus Beobachtungen von Problemlöseprozessen die Hypothese abgeleitet, zwei grundlegend verschiedene kognitive Zugänge bei der mathematischen Begriffsbildung zu unterscheiden. Danach sind die kognitiven Denkstrukturen entweder stärker prädikativ oder stärker funktional geprägt, je nachdem ob eher die Analyse von Strukturen oder die Analyse von Wirkungsweisen bestimmend sind (vgl. auch [Hefendehl-Hebeker 2003]). Borromeo-Ferri konnte in ihrer Studie bestätigen, dass die Ansätze Kleins und Burton für verschiedene mathematische Denkstile bei Mathematikern und Mathematikerinnen auch für Lernende in Mathematik zu beobachten sind. Sie kommt aufgrund ihrer Analysen zu der Unterscheidung zwischen ganzheitlichem und zergliederndem Vorgehen ([Borromeo-Ferri 2002]). Auch wenn im Rahmen solcher Studien die verschiedenen Repräsentationsweisen ausschließlich im Kontext spezieller klinischer Situationen und bei bestimmten Aufgabenstellung beobachtet werden, betont Borromeo-Ferri die Relevanz der Übertragbarkeit solcher Ergebnisse auf allgemeine Situationen des Lernen und Lehrens von Mathematik. Dies betont auch Lambert (2003, S.11) aufgrund seiner Synopse verschiedener Ansätze zur Klassifizierung von Denkstilen von Mathematikern und Schülerinnen und Schülern. Er postuliert ein zweidimensionales Schema, das in der einen Dimension zwischen prädikativ und funktional und in der anderen zwischen formal, visuell und konzeptuell unterscheidet. Für die hier vorliegende Analyse eröffnet die Perspektive verschiedener Denkstile und kognitiver Zugänge eine Orientierung, die unterschiedlichen Blickrichtungen der beiden Schülerinnen auf die Aufgabe zu konturieren. Dies bezieht sich hauptsächlich auf die Unterscheidung zwischen prädikativ und funktional.

Diese beiden verschiedenen Sichtweisen lassen sich zudem in Beziehung setzen zu den beiden wesentlichen Grundvorstellungen des Funktionsbegriffs, die Malle (2000) als die beiden wesentlichen Aspekte einer Funktion, „die beiden Seiten einer Medaille“, bezeichnet (vgl. Seite 58): den Zuordnungs- und den Kovariationsaspekt. Beim Aspekt der Kovariation wird das Änderungsverhalten betont, ist also mehr dynamisch zu sehen (z.B. „Wie verhält sich f(x) bei wachsendem/ fallendem x?“) im Gegensatz zum Zuordnungsaspekt, der eher mit einem statischen Erfassen der Funktion verbunden ist, was sich zum Beispiel in der Frage ausdrückt: „Welches f(x) gehört zu einem bestimmten x?“

Um den Einfluss der Sichtweisen auf die Gesprächsdynamik besser abbilden zu können, wurden zwei parallele Kodierungen des gesamten Gesprächsverlaufs vorgenommen, soweit sie aus der Artikulation erkennbar waren. Das so entstandene Strukturschema findet sich in Abbildung 9.3.

Die eine Kodierung bezieht sich auf den verwendeten kognitiven Zugang (siehe „Kognitiv“ in Abbildung 9.3) und die zweite auf die Art der kommunikativen Handlung. Für die erste Kodierung wurden die Redebeiträge von P und U – sofern eindeutig zuzuordnen – entweder als eher statischer oder eher dynamischer Zugang bezeichnet. Beiträge, die nicht eindeutig zuzuordnen waren und Beiträge der dritten Schülerin bzw. des Schülers wurden unter „ohne Zuordnung“ zusammengefasst. Damit erhielt man die fünf Kategorien:

1. ohne Zuordnung (oZ)

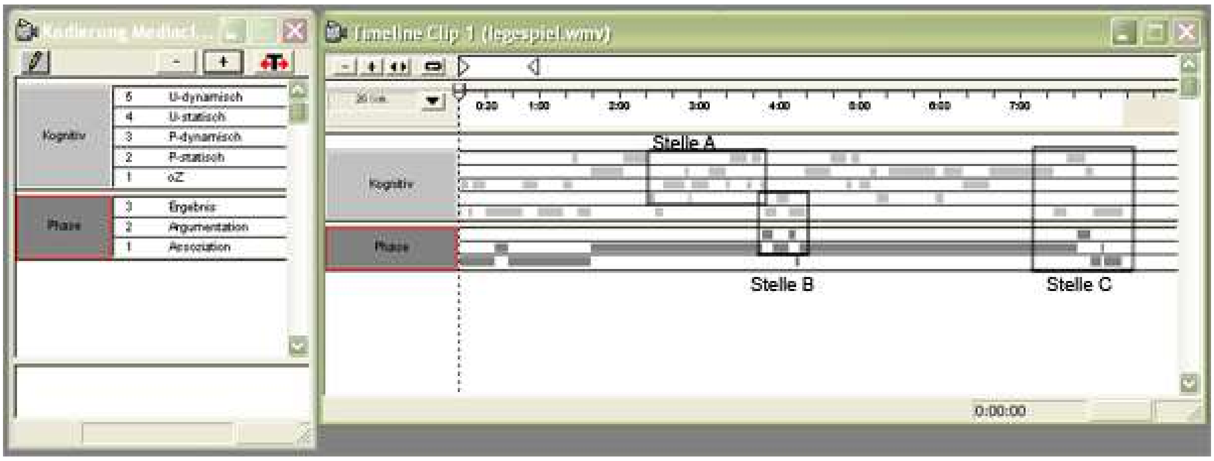


Abbildung 9.3: Strukturschema des Gesprächsverlaufs

2. P – statisch

3. P – dynamisch

4. U – statisch

5. U – dynamisch

Die zweite Kodierung bezüglich der kommunikativen Handlung sollte als parallele Sicht den Zusammenhang zwischen dem kognitiven Zugang und der jeweiligen Phase der Problemlösung und der damit verbundenen Art der kommunikativen Handlung sichtbar machen. Dabei wurden die Redebeiträge in die drei Grobkategorien klassifiziert, die auch für das Analyseschema (Tabellen F.1 bis F.3) leitend waren: Assoziation, Argumentation und Ergebnis (vgl. Seite 149)

Die Synopse der beiden Kodierungen in Abbildung 9.3 lässt folgende Zusammenhänge hervortreten:

- Insgesamt zeigt U eine größere Flexibilität als P zwischen den beiden Strategien zu wechseln. Obwohl U deutlich häufiger aus statischer Sicht auf exponierte Punkte schließt (vgl. 2. Zeile bei der oberen Kodierung), greift sie doch P´s Sicht von Verlauf und Steigungen auf (1. Zeile) und nutzt sie, um die zugehörigen Graphen zu finden. Ihre Redebeiträge sind deutlich länger als die von P und bestehen häufiger aus mehrschrittigen Gedankenketten - insbesondere gegen Ende (ab Zeitpunkt 6:00). Dies passt auch zum Gesamteindruck, den sie vermittelt.

Sie spricht sicherer und bestimmter als P und wendet „ihre“ Strategie der Punktbetrachtungen souverän und überzeugt an. Am Ende (ab ungefähr 6:40) ist sie es, die die endgültigen Argumente liefert, das zweite Set sicher zu bestimmen. Dabei begründet sie zunächst durch Punktbetrachtungen und nutzt P´s Sicht auf den Graphenverlauf zur letzten Absicherung der Zusammengehörigkeit des gefundenen Sets.

- P´s Redebeiträge sind eher kurz und fragend und ihr Hauptaugenmerk liegt auf der Analyse der Graphen hinsichtlich des Verlaufs. Es interessiert sie, wann der Graph fällt und wann er steigt und wie dementsprechend die erste Ableitung aussehen muss. Sie nutzt die Strategie der Punktbetrachtung lediglich zur Kontrolle oder um nach gefundenem Paar eines Graphen zu f und f´ den dritten Graphen zu f´´ zu bestimmen (Stelle C, ungefährer Zeitpunkt 3:40).

- Bevor das erste Graphen-Paar (Stelle B, zwischen 2:20 und 3:30) gefunden wird, ist der Wechsel zwischen den Repräsentationsformen bei beiden Schülerinnen eher kurztaktig (Stelle A) und scheint sich gegenseitig zu ergänzen.

9.1.4 Erkenntnisse aus der Analyse

Zunächst muss konstatiert werden, dass im Zuge der gemeinsamen Problemlösung in den Äußerungen der Schülerinnen eine Vielzahl kognitiver Tätigkeiten sichtbar werden, die sich nach den fünf zugrunde gelegten Bereichen Rezipieren, Darstellen, Analysieren, Reflektieren und Kreieren (vgl. dazu Kapitel 5.3, Seite 66) spezifizieren lassen.

- Der Bereich des Rezipierens macht hier zwar nicht die primären Handlungen aus, doch tritt Rezipieren als Teil der Aktivitäten der beiden Schülerinnen in zweifacher Hinsicht auf. Einerseits nutzen sie bewusst die Sicht und Strategie der jeweils anderen für die Problemlösung. Zum anderen verwenden sie konsolidiertes mathematisches Wissen, das sie zum Beispiel im vorherigen Unterricht erworben haben, übernehmen also auch auf diese Weise fremdes Gedankengut.

- Das Darstellen im Sinne eines Wechsels der verschiedenen mathematischen Darstellungsarten beschränkt sich hier aufgrund der Aufgabenstellung auf das Verbalisieren der Eigenschaften der vorgegebenen Graphen. Im Zuge der Erklärungen beziehen die Schülerinnen keine weitere Darstellungsart ein.

- Das Analysieren gehört bereits von der Fragestellung, die zueinander passenden Graphen zu finden, zur exponierten Tätigkeit bei dieser Aufgabe. Dies wird auch im Gespräch deutlich sichtbar. Die Schülerinnen analysieren die vorgegebenen Graphen hinsichtlich ihrer lokalen und globalen Eigenschaften. Dazu gehört zunächst das Erfassen der besonderen Form des Graphen, aufgrund derer die Schülerinnen die Graphen nach dem Grad des Funktionsterms sortiert haben. Das Erkennen markanter Punkte wie Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte ist ein weiterer Akt der Analyse. Auch das Erfassen des Steigungsverhaltens in verschiedenen Bereichen des Graphen wird von den Schülerinnen als weiteres Kriterium vollzogen.

- Reflexion wird sichtbar, wenn die Schülerinnen ihr Handeln von einem höheren Standpunkt aus betrachten und Erkenntnisse bewusst für späteres Handeln nutzen. Dies geschieht zum Beispiel, wenn P in Zeile 45 einwendet: ⋯ mit den Extrempunkten haben wir uns gerade vertan, lass uns erst mal gucken“. Die Negativerfahrung will sie bewusst nicht wiederholen und stellt sich deshalb gegen eine Wiederholung der Strategie, über Punktbetrachtung zum Ziel zu kommen. Auch U reflektiert ihr Handeln, wenn sie ihr gewähltes oder intendiertes Vorgehen bewusst als „Verfahren“ bezeichnet. So sagt sie in Zeile 144 „man kann das ja wieder mit dem gleichen Verfahren gucken“ und meint damit, dass zunächst einzelne Punkte betrachtet werden, was sie dann auch tut.

- Kreative Tätigkeiten sind gefordert und werden deutlich, wenn es um Ideen geht, auf welche Weise man sich der Lösung nähern kann. Auch in Phasen, in denen der Lösungsprozess ins Stocken gerät und neue Impulse nötig sind, zeigen die Schülerinnen Kreativität. In beiderlei Hinsicht lassen sich im Gesprächsverlauf Belege finden: Das Vorstrukturieren der Graphen nach dem Grad der Funktion lässt ebenso wie das Finden geeigneter Strategien, um die Zusammengehörigkeit der Graphen zu erkennen, auf kreative Akte schließen. Die kreativen Impulse, die den Prozess neu in Gang setzen und den Rest der Gruppe neu für die Sache motivieren sollen, sind unterschiedlicher Natur. Das ist zum Beispiel das Verschieben einzelner Karten, um so auch für die anderen neue Karten in den Blick zu rücken (z.B. Zeile 15). Oder es ist das bewusste Wiederholen bereits vollzogener Erkenntnisse, was P häufiger vollzieht.

Das Gewähren des informellen Austausches liefert hier den Rahmen, dass die Lernenden ihr Wissen aktiv in der Auseinandersetzung mit anderen aufbauen können. Sie haben so die Möglichkeit, in einem konstruktivistischen

Sinne ihr Lernen durch „Reorganisation bereits vorhandener Wissensstrukturen“ Spitzer (2002) aufzubauen. Dabei fließen ausschließlich die individuellen Vorerfahrungen und das bereits erworbene Wissen als Basis der Kommunikation mit ein und sind alleinige Anker, Lösungsansätze - hier in Form von Zusammengehörigkeitskriterien der Graphen - zu finden. Es gibt außer der Aufgabenstellung keine gerichteten Impulse durch die Lehrperson. Die Kommunikation ist insofern „frei“. Ihre Dynamik gewinnt sie allein aus der Bereitstellung von Ideen aus dem Kreis der Schülergruppe. Diese Art des Lernens geschieht interaktiv im Austausch zwischen den beiden Schülerinnen und ist ein gutes Beispiel dafür, wie - im Sinne Voigts (1984) die Interaktionslogik dazu beiträgt, die Sachlogik zu schärfen. Es liegt nur im Duktus der Lernenden, die fachliche Präzisierung vorzunehmen. Dabei ist die Suche nach sprachlicher Klarheit äußeres Zeichen der fachlichen Präzisierung. Insofern verläuft hier das Zusammenspiel von sprachlicher Gestaltung und fachlichem Verstehen entgegengesetzt zu dem bei vielen von der Lehrperson geführten Gesprächen, wo im günstigen Fall das inhaltliche Verstehen der sprachlichen Exaktheit folgt und nicht wie hier - das exakte Formulieren dem Verstehen des Sachverhalts. Hierin zeigt sich der Wert der freien Kommunikation, dass trotz der bestehenden Unschärfen „es sich im Laufe des Gesprächs richtet“. Das informelle Austauschen lässt zu, dass noch unklare, verschwommene Gedanken ausgesprochen werden und jede der Protagonistinnen sich einen verbalen Handlungsspielraum verschafft. Dabei bleiben verschiedene Deutungen nebeneinander stehen und werden eigene Denkstile und Präferenzen parallel verfolgt. Dies geschieht lediglich in Abgrenzung zu anderen, die als gleichberechtigt gesehen werden. Im Laufe des Gesprächs werden diese jedoch klarer und eindeutiger gefasst. Die Chance für diesen rationalen Akt haben die Schülerinnen nur aufgrund des freien Rahmens, dessen Hauptmerkmal die Lehrerabstinenz ist. Sie können für sich selbst das Reden über Mathematik kultivieren ohne von voreiligen Impulsen - zum Beispiel in Richtung Korrigieren ungenauer Formulierungen - gestört zu werden.

In diesem Sinne macht der hier geführte Dialog zwischen den beiden Schülerinnen P und U die von Kambartel genannten Charakteristika eines rationalen Dialogs deutlich (nach [Hefendehl-Hebeker 2004a]):

- *Der Dialog ist unvoreingenommen*: Beide Protagonistinnen werden im Laufe des Gesprächs bereit und flexibel, ihre eigene Sichtweise durch die jeweils andere zu ergänzen und damit die eigene abzurunden. Dies wird insbesondere dadurch deutlich, dass beide die jeweiligen Strategien der anderen als Überprüfungskriterium für die Zusammengehörigkeit der Graphen nutzen.

- *Der Dialog ist zwanglos*: Alle Äußerungen sind spontan und frei. Es herrscht keine Angst, ungenau oder falsch zu formulieren, da es keine Person gibt, die aufgrund eines übergeordneten Kategoriensystems wie zum Beispiel der konsolidierten Fachsicht die Äußerungen bewertet und gegenbenfalls verbessert. Allein die sich im Gespräch kognitiv ergebenden Dissonanzen geben Anlass zur Verbesserung von Formulierungen und Sichtweisen.

- *Der Dialog ist nicht persuasiv*: Es werden keine fraglos hingenommenen Setzungen benutzt oder gar daran appelliert. Der gesamte Dialog zeichnet sich durch die alleinige Kraft des rationalen Denkens und Austauschens aus und durch die Bereitschaft, dies zu entwickeln und zu entfalten.

Die Implikationen, die Hefendehl-Hebeler für das dialogische Prinzip beim Lernen nennt, lassen sich an dieser Sequenz gut erkennen:

- *Offenheit und einfühlendes Verstehen für den Dialogpartner*

- *Die Bereitschaft zu subjektiver Wahrhaftigkeit und den Verzicht auf die Ausübung von Manipulation und Zwang*

- *Das Streben nach Wahrheit, das gekennzeichnet ist durch Intensität des Suchens sowie die Bereitschaft, Positionen transparent und Überzeugungen durch Begründungsbemühungen kontrollierbar zu machen*

- *Das Streben nach Konsens in der Weise, dass gemeinsame Positionen (···) im Dialog ausgehandelt werden.* ([Hefendehl-Hebeker 2004a], S.47)

Die Begründungsbemühungen bestehen hier nicht aus druckreifen, immer konsistenten Beiträgen. Es sind vielmehr bruchstückhafte Äußerungen und kaum vollständige Sätze. Dennoch wird deutlich, dass sich die Schülerinnen intensiv mit den Inhalten auseinandersetzen und sowohl das eigene Verstehen wie auch das der anderen vertiefen können. Die Analyse zeigt, dass die einzelnen Äußerungen der Schülerinnen nachvollziehbar Schritte im Begriffsbildungsprozess verursachen. Dies wurde in den Detailanalysen für mehrere Stellen gezeigt. Dabei werden Fehlvorstellungen korrigiert, nicht explizit und gezielt, sondern implizit im Laufe des Lösungsprozesses. Vor allem wachsen der Grad der Lösungsflexibilität und die Sicherheit beim Lösen mit dem Grad der Auseinandersetzung mit der „fremden" Strategie der jeweils anderen Schülerin. Der Grad der Auseinanderstezung und des „miteinander Denkens" zeigt sich auch darin, dass die Kommunikation intensiver wird bis hin zum gemeinsamen Formulieren.

Auffallend ist, dass es sich hier faktisch um einen Dialog zwischen zwei Personen handelt, obwohl in einer Gruppe zu viert zusammen gearbeitet wird. Der Dialog öffnet sich erst dann, nachdem die eigenen Unsicherheiten überwunden sind. So lenkt U ihren Blick erst nach dem Finden des zweiten Sets auf die weiteren Mitschüler und spricht C gezielt an, das dritte und letzte Set zu finden. Es wäre wert, zu recherchieren, welchen Nutzen die beiden anderen Gruppenmitglieder – A und C – aus der Sequenz ziehen, was aber hier leider nicht möglich ist.

Insgesamt macht die Analyse dieser Sequenz das sichtbar, was Kleist (1805) in seinem Essay „Über die allmähliche Verfertigung der Gedanken beim Reden“ in der Idee zusammenfassst „l´idée vient on parlant“. Diese Erkenntnis gibt einmal mehr Anlass zu der Empfehlung an Lehrpersonen, Schülerinnen und Schüler öfter diesen Freiraum zu gewähren und sich darin zu üben, „Lehrerferne“ zu gewähren und auszuhalten.

9.2 Transkriptanalyse: „Was ist ein Wendepunkt?“

Die Hinführung zu den Begriffen Extrem-, Sattel- und Wendepunkte erfolgt im Rahmen der Lernwerkstatt in den Bausteinen E („Extremes“, Seite 27), K („Sanft Krümmt sich...“, Seite 28)) und L („Lange Leitungen“, Seite 26)). Die Schülerinnen und Schüler werden sowohl im Vorwort zum Material als auch bei den einzelnen Bausteinen darauf hingewiesen, dass diese drei Bausteine eng zusammen gehören und sich gegenseitig bedingen. Eventuelle Lücken und Unklarheiten an einzelnen Stellen können deshalb unter Umständen erst geschlossen und gelöst werden, wenn die jeweils anderen der drei Bausteine bearbeitet sind. Bei den drei Bausteinen wurden sowohl verschiedene inhaltliche Schwerpunkte gewählt als auch unterschiedliche Aktivitäten angeregt. Die Analyse von Funktionen in den unterschiedlichen Repräsentationsformen Term, Graph, Tabelle ist in Baustein E die Basis, um die Eigenheiten eines Extrempunktes auch mathematisch zu bestimmen. In Baustein K geht es um die Analyse eines Graphenverlaufs im Kontext eines Realbezugs. Bei Baustein L steht sowohl das Recherchieren wie auch das Vernetzen neu gewonnener Erkenntnisse durch Strukturieren verschiedener Graphen im Mittelpunkt.

In der beobachteten Unterrichtssequenz wird Baustein L von einer Kleingruppe von vier Schülerinnen (B, F, S und L) bearbeitet. Die gesamte Videoaufzeichnung zeigt die Arbeit der Schülerinnen über 70 Minuten während einer Doppelstunde. Die Aufzeichnung beginnt nicht zu Beginn der Doppelstunde, sondern aus organisatorischen und technischen Gründen ca. 20 Minuten später und endet mit der Doppelstunde. Den Schülerinnen steht Computeralgebra auf einem Handheld-Gerät[1] zur Verfügung, wobei in der konkreten Situation nur drei Schülerinnen ihren Rechner dabei haben. Die Schülerin S hat ihren Rechner zu Hause vergessen.

Auffallend ist, dass die Schülerinnen keine expliziten Vereinbarungen treffen, woran und in welcher Reihenfolge gearbeitet wird. Von der Aufgabenstellung her ist auch keine Reihenfolge vorgegeben. Die Struktur des Blattes ist vielmehr bewusst wie eine Mindmap gestaltet, um das vernetzte Erarbeiten der Begriffe und Konzepte nahe zu legen und den Schülerinnen die für sie passende Abfolge der Erarbeitung zu ermöglichen. Auch wenn diese Freiheit der Erarbeitungsabfolge als Chance für den Lernprozess zu sehen ist, liegt hierin jedoch zunächst eine für die Schülerinnen unbewusste Schwierigkeit, da die Arbeitsabfolge zu organisieren ist. Dies wird von den Schülerinnen an keiner Stelle thematisiert – sondern eher spontan und nonverbal Konsens erzielt, woran gearbeitet wird. Dabei werden insbesondere die Impulse einer Schülerin (F) genutzt, die immer wieder einzelne Fragestellungen aus dem Material vorliest und in die Runde trägt. Am Ende der Doppelstunde sind alle Aufgabenstellungen dieses Bausteins bearbeitet, die Lösungen im Heft notiert und in der Wahrnehmung der Schülerinnen abschließend bearbeitet.

Kapitel 9.2.1 will zunächst einen Eindruck des Gesprächsverlaufs der gesamten Doppelstunde vermitteln, bevor in Kapitel 9.2.3 die Analysen der einzelnen Phasen und in Kapitel 9.2.2 die speziellen Schwierigkeiten im Begriffsbildungsprozess zum „Wendepunkt“ beschrieben werden.

9.2.1 Merkmale und Struktur des Gesprächs

Um einen Überblick über den Gesamtablauf über die Dauer der 70 Minuten zu erhalten, wurde zunächst eine Strukturanalyse der Gesamtsequenz vorgenommen, deren Ergebnis in Abbildung 9.4 zu sehen ist. Dabei wurden verschiedene Aktionsstränge dargestellt, die im Gesprächsverlauf vorkommen:

- In der obersten Zeile ist der Haupt-Aktionsstrang aufgezeichnet. Das ist jeweils die Aktion, die aktuell im Vordergrund steht. Sie wird meist von dreien oder allen vieren, manchmal auch nur von zwei Schülerinnen getragen.

[1] Hier ist es der TI-89 der Firma Texas Instruments. Zum Begriff „Handheld“ vgl. Seite 75)

- In der zweiten Zeile wird näher spezifiziert, welche Personen den Haupt-Aktionsstrang aktiv gestalten. Sind es zwei Schülerinnen, wird es in der zweiten Zeile festgehalten oder es sind drei oder alle vier, dann ist es in der dritten Zeile vermerkt.

- Die untersten vier Zeilen spezifizieren die Aktionen der Einzelnen. Es gibt pro Schülerin eine Reihe, in der insbesondere die Impulse als Kreise sichtbar gemacht sind und zwar in der jeweiligen Farbe, auf welche Aktion sich der Impuls bezieht.

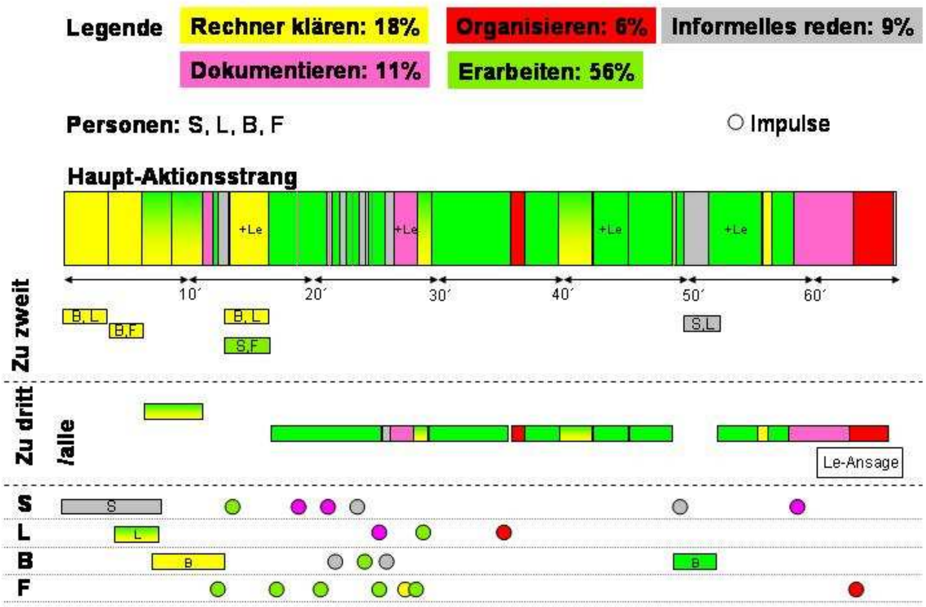


Abbildung 9.4: Strukturanalyse der Gesamtsequenz

Sowohl Aktionsstränge wie Impulse werden in der Abbildung 9.4 in verschiedenen Farben dargestellt, um so die verschiedenen Arten der Handlung bzw. des Impulses zu unterscheiden. Dabei werden – wie auch in der Legende am oberen Bildrand sichtbar – fünf Kategorien aufgenommen, die sich für diese 70-minütige Sequenz anbieten. Durch diese Kategorisierung sollte insbesondere ausgewiesen werden, in welchem Umfang es die Schülerinnen erreicht haben, über diese Zeit bei der „Sache“ zu bleiben und wie sich Impulse Einzelner auf die Kommunikation ausgewirkt haben. Folgende Kategorien können deutlich unterschieden werden:

- *Erarbeiten*: Alle Gesprächsabschnitte, in denen es um die inhaltliche Erarbeitung der Thematik geht, werden hierunter subsumiert.
- *Rechner erklären*: Das sind Phasen, in denen es primär um technische Fragen geht, die vorher im Unterricht oder bei den selbst gestellten Hausaufgaben aufgekommen sind. Dazu gehört zum Beispiel das Problem, warum zwei Rechner verschiedene Bilder im Grafikfenster liefern oder wie sich Terme innerhalb des Rechners kopieren lassen.
- *Dokumentieren*: Die Zeiten, in denen etwas gemeinsam formuliert und im Heft fest gehalten wird, werden unter dieser Rubrik zusammengefasst.
- *Organisieren*: Hierunter fällt das Organisieren der weiteren Arbeit, wie Verabredungen bezüglich Hausaufgaben und konkretes Planen des weiteren Vorgehens im Rahmen der Lernwerkstatt.
- *Informelles Reden*: Hiermit sind alle Gesprächsanteile privater Natur gemeint, die sich nicht auf die Sache beziehen.

Im Rahmen der Arbeit an dieser Sequenz fiel auf, dass die hier aufgenommene Gruppenarbeit spontan sehr unterschiedlich empfunden wurde, je nachdem ob man vor Ort anwesend war oder ob man das Video angeguckt hat. Diejenigen (z.B. die Lehrperson), die die Stunde vor Ort erlebt haben, empfanden die Arbeit dieser Kleingruppe in der spontanen Rückmeldung als produktiv und konzentriert. Diejenigen dagegen, die ihren Eindruck aufgrund des Videos gewonnen haben, hoben zunächst den hohen Anteil der nicht-mathematischen Privatgespräche hervor. Im Unterschied zum realen Erleben vor Ort, wo diese einzelne Gruppe nur als eine von mehreren Gruppen im Raum wahrgenommen wird, bleibt beim Angucken des Videos die Aufmerksamkeit stets bei dieser einen Gruppe. Dies kann leicht zu dem Eindruck führen, dass zum einen das Gespräch in manchen Teilen langatmig wirkt und dass vor allem das zwar kurze, aber sehr markante Abschweifen in private Gespräche stärker im Gedächtnis haften bleibt. Die Strukturanalyse ermöglicht hier eine objektivere Einschätzung des zeitlichen Ausmaßes der Privatgespräche und erlaubt vor allem eine bessere Einschätzung, welche Wirkung diese Phasen für den Arbeitsprozess haben.

Die Strukturanalyse zeigt, dass Phasen des informellen Redens lediglich 9% der Zeit ausmachen. Die Phasen sind jeweils kurz und bestimmen kaum den Hauptaktionsstrang, da meist schnell ein inhaltlicher Impuls gesetzt und aufgegriffen wird. Die Arbeitsgruppe versteht es gut, trotz der Unterbrechungen die Arbeitszeit zu nutzen. Nur ab der 50. Minute gibt es eine längere solche

Phase, bei der drei Schülerinnen beteiligt sind. Schülerin B bleibt aber auch in dieser Phase mit der Sache beschäftigt.

Meist lässt sich deutlich ein Strang als Hauptaktion ausweisen, dies gilt insbesondere ab der ca. 15. Minute, ab der die Hauptaktion von mindestens drei der vier Schülerinnen getragen wird. Vorher, in den ersten 15 Minuten, gibt es kein deutliches Hauptgespräch, sondern mehrere parallele Gespräche zu verschiedenen Themen. Dabei erstaunt die Fähigkeit Einzelner, parallelen Aktionssträngen zu folgen und unterschiedlich gestellte Anforderungen fast gleichzeitig zu bedienen. So gibt F zum Beispiel in der folgenden Sequenz sowohl B als auch L eine Antwort, obwohl ganz Unterschiedliches gefragt wurde.

1 F: – also ein Wendepunkt ist auch ein Sattelpunkt \
2 B: Mei wie schön (· · ·) *guckt auf TR-Bildschirm und zeigt ihn dann zu F*
3 F: *zu B und guckt auf deren Rechner*Jaaa, jetzt sieht´s gleich aus
4 L: *zu F* Oder ein Hoch- und Tiefpunkt
5 F: *zu L* **Nein** Hoch- und Tiefpunkt ist was anderes · · · Sattelpunkt

Insgesamt lässt sich aufgrund der Strukturanalyse sagen, dass die Schülerinnen durchaus rege an der Sache gearbeitet haben. Es wurden immer wieder Impulse zur inhaltlichen Erarbeitung gesetzt und angenommen, nach informellen Phasen wieder zur Arbeit zurück gefunden. Der Rechner hat zu Anfang technische Fragen aufgeworfen, weshalb es hier Phasen gibt, in denen es primär um Fragen der Bedienung geht. Zum Ende waren diese Probleme gelöst und der Rechner wurde im Rahmen der Erarbeitung genutzt. Die Phasen der Arbeitsorganisation und Dokumentation konzentrieren sich verständlicherweise am Ende der Doppelstunde, was aber auch auf Weitsicht und Planungskompetenz dieser Schülergruppe schließen lässt. Es bleiben nicht nur die einzelnen Aufgaben dieser Stunde im Blick, sondern auch die Gesamtanforderung im Rahmen der Lernwerkstatt.

In den Phasen der inhaltlichen Erarbeitung legen die Schülerinnen ihr Hauptaugenmerk auf zwei Aufgaben. Das ist zum einen die Tabelle aus Baustein L, in der als Kopfzeile „Grad der Funktion – Maximale Anzahl Nullstellen – Maximale Anzahl Extrempunkte – Maximale Anzahl Wendepunkte“ vorgegeben ist und die gefüllt werden soll (vgl. Seite 26). Zum anderen beschäftigen sich die Schülerinnen mit der Aufforderung aus Baustein L, sich zu informieren, was ein Wendepunkt ist. Diese beiden Aufgaben werden nicht sequentiell bearbeitet, sondern stückweise abwechselnd bzw. parallel. Zunächst versuchen die Schülerinnen den Begriff des Wendepunktes zu klären und finden auch eine für sie zufriedenstellende Definition, die sie im Heft notieren. Im weiteren Gespräch treten beim Ausfüllen der Tabelle Unsicherheiten auf, weshalb der Begriff Wendepunkt erneut besprochen wird. Dabei wird deutlich, dass die

Unterschiede zwischen den Begriffen Extrempunkt, Sattelpunkt und Wendepunkt für die Schülerinnen nicht klar sind. Es kommt zu Verwechslungen, insbesondere zu den beiden folgenden:

- Die Bezeichnungen „Sattelpunkt“ und „Wendepunkt“ werden synonym verwendet.
- Lokale Extrema werden als Wendepunkte angesehen und im Gegensatz dazu absolute Extrema als Extrempunkte.

Diese Verwechslungen verursachen bei den Schülerinnen immer wieder kognitive Konflikte beim Ausfüllen der Tabelle. Diese Dissonanzen sind Motor des Gesprächs und bringen den Austausch und die Suche nach einer Lösung und Begriffsklärung voran. Gegen Ende der Sequenz können die Verwirrungen geklärt werden – letztlich erst, nachdem die Lehrperson gezielt um Rat und Bestätigung gebeten wurde.

Der Schwerpunkt der folgenden Analyse liegt auf den Gesprächsabschnitten zum Wendepunkt. Dieser Fokus wurde gewählt, da zum einen diese Frage das gesamte Gespräch dominiert und zum anderen, da beim Bemühen um eine Klärung die Schülerinnen sehr unterschiedliche und vielschichtige kognitive Aktivitäten vollziehen.

Es lassen sich die folgenden Gesprächsabschnitte unterscheiden, die einer sequentiellen Analyse in einer Forschergruppe an der Universität Duisburg-Essen unterzogen wurden.

1. Zeilen 218 – 290: Eine erste Definition: „Der Wendepunkt - auch Sattelpunkt genannt!?“
2. Zeilen 470 – 524: „Wie rechne ich das dann aus?“ und andere offene Fragen
3. Zeilen ab 550 – 605: „Dann geht es doch um eine Richtungsänderung“

Kapitel 9.2.1 bis 9.2.4 widmen sich der Analyse des Transkripts und den gewonnenen Erkenntnisen. Vorher werden jedoch in Kapitel 9.2.2 einige Gedanken zur Begründung der Aufgabe „Informieren Sie sich, was man unter einem Wendepunkt versteht!“ ausgeführt, da dieser Weg eher ungewöhnlich im Mathematikunterricht ist. Diese Aufgabe hat in der beobachteten Sequenz die Begriffsklärung ausgelöst.

9.2.2 Gedanken zur hier intendierten Begriffsbildung

Die Aufforderung, sich selbstständig über den Begriff „Wendepunkt“ zu informieren, muss im Kontext gesehen werden mit den anderen Aufgabenstellungen in den drei vernetzten Bausteinen E, L und K. So wird in Baustein K der konkrete Anwendungsbezug des Kurvenverlaufs einer Straße einbezogen (vgl. Baustein K, Seite 28). Dennoch bleibt die Aufgabenstellung, sich selbst zu informieren, für manche Lernende je nach Durchgang durch die Lernwerkstatt die erste Anregung im Hinblick auf das Erlernen des Begriffs „Wendepunkt“. Dies gilt auch für die Schülergruppe, deren Arbeit hier untersucht wird.

Die Recherche zu einer Bezeichnung (hier das Wort „Wendepunkt“) als erstem Zugang zu einem Begriff geht einen eher umgekehrten Weg als allgemein üblich im Mathematikunterricht. Normalerweise dient ein inner- oder außermathematisches Problem als Einstieg und Hinführung zu einem neuen Begriff – ganz im Sinne des genetischen Prinzips. Der Weg, vom Wort bzw. dem Zeichen her das Tor zur Bedeutung des Begriffes zu öffnen, scheint diesem Prinzip zu widersprechen und liegt quer sowohl zur Grundstruktur schulischen Mathematikunterrichts wie auch vielfältiger fachdidaktischer Empfehlungen. So betont Hußmann (2003) in Einklang mit Ruf/Gallin (1998) die Bedeutung sogenannter Kernideen, die den Lern- und Begriffsbildungsprozesses auslösen und meint damit *Provokationen, mit denen Lernende zum Handeln auf der Sachebene herausgefordert werden* ([Hußmann 2003], S. 34). Bei Vollrath klingt dies in Anlehnung an Polya (1949) weniger zeitlich fixiert: *Vielmehr wird man sich im Mathematikunterricht darum bemühen, Begriffsbildungsprozesse in Problemzusammenhänge einzubetten.* ([Vollrath 1994], S.257)

Auch in dem von Hischer ([Hischer 1996], [Hischer 2002]) als ontogenetisch bezeichneten Weg der Begriffsbildung im Unterricht (vgl. auch [Lambert 2003]) klingt die inner- oder außermathematische Problemstellung an, aufgrund derer sich Begriffe im Laufe der Zeit herausbilden. Die Bezeichnung und Benennung scheint zumeist die auch sequentiell letzte Stufe des Begriffsbildungsprozesses zu sein.

Das gegenteilige Vorgehen, das Symbol oder Zeichen als Auslöser zum Erarbeiten zu wählen, passt vielmehr zur universitären, systematischen Arbeitsweise, ausgehend von der Definition über Sätze und ihre Beweise Anwendungen zu behandeln. Eine solche Einordnung der hier besprochenen Aufgabenstellung wäre jedoch zu eng. Im Rahmen dieser Lernwerkstatt folgt diese Aufforderung nicht einer Phase der instruktiven Vermittlung wie in klassisch aufgebauten Vorlesungen, sondern es schließt sich Freiraum für Recherche und insbesondere die Möglichkeit der Interaktion im informellen Raum der Kleingruppe an. Dadurch wird der Rahmen geschaffen, dass Lernende frei und ungezwungen, auch erste, auch unfertige Ideen austauschen können. Dabei ist die Vorgehensweise frei und nur in der jeweiligen Kleingruppe kooperativ zu regeln oder auszuhandeln. Zu erwarten ist dabei ein Gemisch aus spontanem Austausch von Vorkenntnissen, Ideen und Assoziationen, dem Suchen und Nachschlagen im Schulbuch oder anderen, verfügbaren Quellen und der Nutzung des verfügbaren Computeralgebrasystems als Beispielgenerator oder Visualisierungsinstrument. Das übergeordnete Ziel dieser Aufgabe ist es, dass Schülerinnen und Schüler lernen, gezielt zu recherchieren und sich selbstständig Informationen zu beschaffen. So soll insbesondere das Schulbuch nicht nur als Aufgabenlieferant sondern auch als Nachschlagewerk kennen und nutzen gelernt werden.

9.2.3 Analyse der einzelnen Phasen

Um auch hier die Begriffsbildungsprozesse der einzelnen Schülerinnen näher konturieren zu können, wurden ebenfalls gemäß den methodischen Entscheidungen dieser Studie (vgl. Seite 140) Analyse-Tabellen erstellt, in denen jeweils die kommunikative Handlung, der Referenzkontext und der jeweilige Schritt im Begriffsbildungsprozess der beteiligten Schülerinnen aufgenommen sind. Diese Tabellen befinden sich im Anhang F. Das Trankript des Gesamtgesprächs ist im Anhang E.2 zu finden.

Erster Abschnitt:
Eine erste Definition „Wendepunkt - auch Sattelpunkt genannt“
Zeilen 162 – 169/ 218 – 290

Der erste Gesprächsabschnitt umfasst zwei Teile – zum einen die Zeilen 162-169 und zum anderen die Zeilen 218 – 290. Im ersten Teil ergreift F zum ersten Mal die Initiative, die Aufgabenstellung „Informieren Sie sich, was man unter einem Wendepunkte versteht!“ zu bearbeiten. Dieser erste Versuch wird von den anderen dreien aus unterschiedlichen Gründen nicht aufgegriffen. B ist damit beschäftigt, die Graphen zu verschiedenen Termen mit dem Rechner zu erzeugen und will dies erst fertig stellen. Sie äußert dies deutlich. S ist mit Abschreiben beschäftigt – offenbar überträgt sie aus F´s Heft Lösungen bereits bearbeiteter Bausteine. Die dritte Schülerin L fühlt sich plötzlich durch die Kamera gestört.

F: kannst mal machen, dann guck ich das andere nach *liest vor* Informieren Sie sich darüber, was man unter einem Wendepunkt versteht
F: *schlägt im Buch nach*
F: Der Wendepunkt ist der Punkt in dem die Steigung ··· sich wendet

166 L: *Guckt in die Kamera* Oh nein – der guckt mich an *lacht*
167 F: Bin ich froh dass du davor sitzt
168 *Lachen*
169 F: ··· hier Extrempunkte ··· da Wendepunkte

Bereits in dieser kurzen Passage wird eine erste Vorstellung von „Wendepunkt“ sichtbar: Das Wenden wird auf die Steigung bezogen, was im mathematischen Sinn einem lokalen Extrempunkt entsprechen würde. Hierbei sind verschiedene Referenzkontexte denkbar, die die Gedanken von F prägen können:

- Es könnte einmal die Bedeutung sein, die das „Wenden“ im allgemeinen Sprachgebrauch hat. Dabei bezieht sich Wenden immer auf eine Richtungsänderung, was im Kontext eines Funktionsgraphen als Steigung gesehen werden könnte. Wird zum Beispiel ein Graph in Gedanken „durchlaufen“, dann sind es die lokalen Extrempunkte, bei denen man „sich wenden“ muss im Sinne von umdrehen oder umkehren.
- Der zweite mögliche Referenzkontext für F könnten Bezüge zum vorherigen Unterricht sein, die bei ihr bereits ein Bild von „Wendepunkt“ erzeugt haben. Dass sie ein solches bereits im Kopf hat, zeigen spätere Anmerkungen, zum Beispiel wenn sie ein konkretes Aufgreifen von B aus früherem Unterricht („*ja das ist da wo das halt da von einer Rechtskurve in eine Linkskurveübergeht*“) sehr überzeugt bestätigt (vgl. Zeile 252).
- Konkreter Referenzkontext ist sicher auch die Schulbuchseite, bei der F mit dem Blick verharrt. Sie hat vorher einige Minuten lang für sich alleine im eingeführten Schulbuch ([Griesel/Postel 1999]) geblättert und ihr Blick blieb bei dem w-förmigen Graphen in Abbildung 9.5 hängen. Der Graph erinnert sie offenbar an bereits Behandeltes.

Dieser ersten Initiative von F wird jedoch im Hauptaktionsstrang nicht gefolgt, sondern es stehen zunächst B´s Fragen zum Umgang mit dem Rechner im Vordergrund. Danach startet F einen erneuten Versuch, die Mitschülerinnen zur Bearbeitung der entsprechenden Aufgabenstellung zum Wendepunkt zu bewegen. Diesmal zeigt der Versuch Erfolg. L steigt als erste in das Gespräch ein, B folgt etwas später, da sie erst noch mit etwas anderem beschäftigt ist und S verfolgt das Gespräch zunächst ohne verbale Beteiligung und steigt ein, als sich abzeichnet, dass es klare Ergebnisse gibt, die fest gehalten werden können.

218 F: *guckt ins Arbeitsheft* mit dem Wendepunkt nee/
219 L: Was für´n Wendepunkt /

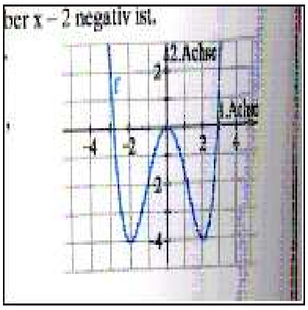


Abbildung 9.5: S.202 in [Griesel/Postel 1999]: Hier verharrt F mit ihrem Blick

F: *liest vor aus dem Arbeitsheft* Informieren Sie sich, was man unter einem Wendepunkt versteht
L,S: Ja
F: Ja hier in dem Buch *liest aus dem Schroedel-Buch und zeigt auf die Graphen Abbildung 9.6, S. 192* steht was man unter einem Wendepunkt versteht

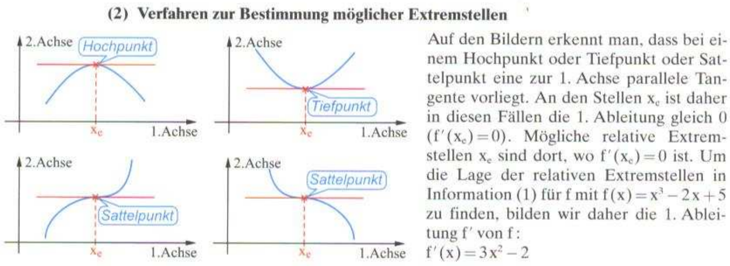


Abbildung 9.6: S.192 in [Griesel/Postel 1999]

S;L: Ja
F: – also ein Wendepunkt ist auch ein Sattelpunkt \
B: Mei wie schön (· · ·) *guckt auf TR-Bildschirm und zeigt ihn dann F*
F: *zu B und guckt auf deren Rechner* Jaaa, jetzt sieht´s gleich aus
L: *zu F* Oder ein Hoch- und Tiefpunkt
F: *zu L* **Nein** Hoch- und Tiefpunkt ist was anderes · · · Sattelpunkt
S: *zu B während sie B´s Rechner in der Hand hält und betrachtet* ist das Funktion/· · ·
F: **Nein** · · ·
L: *zu F* Ja hab´ jetzt hab ich es ja gesehen
L: Och · · ·
F: Ja Mensch· · ·
F: Und aber das ist genauso wie bei den Hoch- und Tiefpunkten dass da an der Stelle die Steigung oder die 1. Ableitung also die – also die Steigung null ist

B: Ja
S: Ja
L: *guckt zu B* Ja
L: Tangente gleich null also m t null
B: ··· bei dem Wendepunkt ist es wie bei den
F: Das da an der Stelle die ähm
B: Ja
F: die Steigung null ist
S: habe meinen Bleistift verloren ...
B: Ah – jetzt das ist da wo
L<: Dann ist das dann hier *zeigt auf einen Punkt auf ihrem Rechnerbild*
B<: *setzt fort* das halt da wo von einer Rechtskurve in eine Linkskurve übergeht
S: Ja
F: Ja genau
L: Ja
L: wenn ich jetzt finden würde, wo das **hier** nochmal war *guckt auf ihren Rechner, zeigt auf einen Punkt und lehnt sich zurück* ··· *zu F* hier war das doch/
S: sollen wir das da aufschreiben/
L: *guckt auf ihren Rechner* dann ist das ja mal da tief und mal hoch nee \ *Zeigt im Heft*
L: Dann isses doch bei der hier / *zu F* guck mal bei der hier dann da/ und
L: Nein nee/
F: Nein nicht da oben\ da oben ist der Hochpunkt
L: Ja aber das geht doch da noch weiter oder nicht
···
F stockt und guckt ins Buch
L: Das hier ist doch so ein Sattelpunkt – da und da oder nicht/ so ein Wendepunkt da geht es wieder runter und da wieder hoch *macht U-förmige Handbewegung am Rechner, stockt am unteren Minimum*
B: Das ist so wie bei der einen Aufgabe die wir gemacht haben – da mit der Produktion *(vgl. Abbildung 9.7)* da war das ja auch so –
F: Ja - **da** war es so
B: da war es ja auch so ein Wendepunkt weil das auch ja auch nur **einer** war
L: Ja – ok

Auch in diesem Abschnitt werden die bereits genannten verschiedenen Referenzkontexte deutlich. Vor allem sind die Erinnerungen aus dem vorherigen Unterricht spürbar. Alle vier Schülerinnen beziehen sich in verschiedener Ausprägung darauf. Insbesondere nennt B explizit in Zeile 268 Aspekte der behandelten Produktionsaufgabe (vgl. Abbildung 9.7, Aufgabenstellung siehe Seite 2), was bei L und F direkte Zustimmung hervorruft. L bezieht sich zudem auf den Bildschirm ihres Rechners, der wahrscheinlich die Graphen

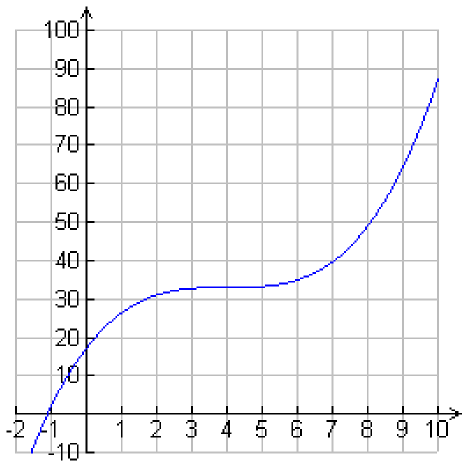


Abbildung 9.7: Produktionaufgabe aus dem vorherigen Unterricht

zeigt, die in Baustein L zur Analyse empfohlen wurden (vgl. Seite 3). Sie versucht daran zu verifizieren, wo nun ein Wendepunkt liegt. Sie zeigt F ihre Vermutungen und bittet um Bestätigung. Es ist davon auszugehen, dass sie dabei auf die Extrema zeigt und diese als Wendepunkt ansieht. F korrigiert dies spontan in Zeile 260, wird jedoch von L verunsichert, als diese auf mögliche, absolute Extrema im weiteren Graphenverlauf weist. Erst durch B´s explizite Erinnerung an die Produktionsaufgabe scheint F wieder sicherer zu werden und scheint auch L diese Variante zu akzeptieren (Zeile 272).

F blättert in ihrem Schulbuch und findet dabei Grafiken, die als weitere Referenzkontexte für das Gespräch herangezogen werden. Bei der Suche im Schulbuch geht F nicht systematisch vor. Sie nutzt nicht das Inhaltsverzeichnis oder die Systematik am Buchanfang, sondern sie blättert frei und entscheidet offenbar nach einem ersten optischen Eindruck, wo sie verharrt und gezielt guckt. So verwundert es nicht, dass die Grafik, der sie ihre Aufmerksamkeit schenkt, an thematisch anderer Stelle steht. So bezieht sich die Grafik in Abbildung 9.6, die sie in Zeile 224 zum ersten Mal in die Diskussion einbringt, auf die Abgrenzung zwischen lokalen Extrempunkten und Sattelpunkten. Hier steht nichts von einem „Wendepunkt“. Dieser Begriff wird erst später im Buch behandelt und eingeführt. F hat offenbar eine vage, graphische Vorstellung von einem Wendepunkt und bleibt im Schulbuch bei Graphen hängen, die sie an dieses Bild erinnern. Sie entnimmt der Grafik Informationen zum Wendepunkt, denn sie sagt zu ihren Mitschülerinnen, dass

„da was von einem Wendepunkt steht“ (Zeile 250). Offenbar kann sie die unteren Graphen in der Abbildung mit der bereits vorhandenen Vorstellung von Wendepunkt verbinden und bestätigt deshalb spontan und deutlich die These von B, dass ein Wendepunkt da ist, „wo das halt von einer Rechtskurve in eine Linkskurve übergeht“ (Zeile 252). Sie sieht darin keine Einwände gegen die Gleichbedeutung von Wende- und Sattelpunkt, auf die sie aufgrund der Schulbuchseite schließt.

Das von B genannte Spezifikum für einen Wendepunkt wird nicht nur von F sondern auch von L und S spontan und deutlich bejaht, von F sogar mit „Ja, genau“ (Zeile 250). Die Formulierung von B lässt darauf schließen, dass Vorkenntnisse und Erinnerungen aus dem vorherigen Unterricht einfliessen. Diese nennt B auch explizit mit der Angabe der „Produktionsaufgabe“ (Zeile 265, Abbildung 9.7), die als Einstieg in die Lernwerkstatt im Plenum besprochen wurde. Bei dieser Aufgabe ging es um Produktionskosten, deren Entwicklung mit Hilfe einer Funktion 3.Grades modelliert wurde. Daran sollte die Notwendigkeit von Funktionsuntersuchungen hinsichtlich besonderer Eigenschaften und markanter Punkte verdeutlicht und motiviert werden. Dass bei diesem Beispiel der Wendepunkt speziell ein Sattelpunkt ist, macht es für die Schülerinnen (eher unbewußt) leicht, F´s Vorschlag einer Definition (Synonymität zwischen Wende- und Sattelpunkt) einerseits und B´s Deutung (Zeile 250) andererseits miteinander zu verbinden.

Der Gesprächsabschnitt endet damit, dass die Übereinstimmung zu einer gemeinsamen Formulierung einer Definition führt.

275 F: *diktiert – alle schreiben* Ein Wendepunkt · · · auch Sattelpunkt genannt · · · wird
276 ermittelt indem man die Steigung der Funktion oder erste Ableitung *Gong fürs Stun-*
277 *denende* gleich Null setzt \ An dem Wendepunkt · · · ähm wechselt die – Weiß jetzt
278 nicht wie ich das formulieren soll – wie kann man das schöner formulieren das steht
279 nicht da – B – du hast es eben gesagt/
280 B: Krümmung der Funktion von rechts nach links *zeichnet mit dem linken Arm eine*
281 *Bewegung von rechts nach links*
282 F: Du drückst das sehr mathematisch aus\
283 B: Die hat gesagt – wir sollen das so ausdrücken – dass wir das verstehen können\
284 S: Können wir nicht einfach sagen die Richtung – weil von rechts nach links stimmt
285 ja nicht – kann ja auch andersrum sein
286 F: Das war ja nur ein Beispiel von links nach rechts\
287 F: So wir haben Pause warum melden die sich dann nicht/ Keiner hat die Klingel
288 gehört – außer mir

Beim gemeinsamen Formulieren wird nach einem übergeordneten Gattungsbegriff gesucht für das, was wechselt. Dazu werden die Begriffe Kurve, Krümmung, Richtung gleichermaßen angedacht und sich letztlich für „Kurve“ entschieden (vgl. B´s Hefteintrag in Abbildung 9.8). In der von den Schülerinnen geäußerten Sammlung von potenziellen Gattungsbegriffen sind die Verwechslungen von Wendepunkt und Extrempunkt bereits angelegt bzw. werden darin sichtbar. Insbesondere das Wort „Richtung“, das S vorschlägt (Zeile 285), legt eher die Assoziation „Extrempunkt“ nahe als „Wendepunkt“, obwohl S explizit damit den Links-Rechts- bzw. Rechts-Links-Wechsel ausdrücken will. Auch wenn der Vorschlag von S, „Richtung“ als Bezugsgröße zu wählen, im Gespräch als letzter genannt wird, scheint B „Kurve“ vorzuziehen. In ihrem Heft findet sich dieser Terminus (Abbildung 9.8).

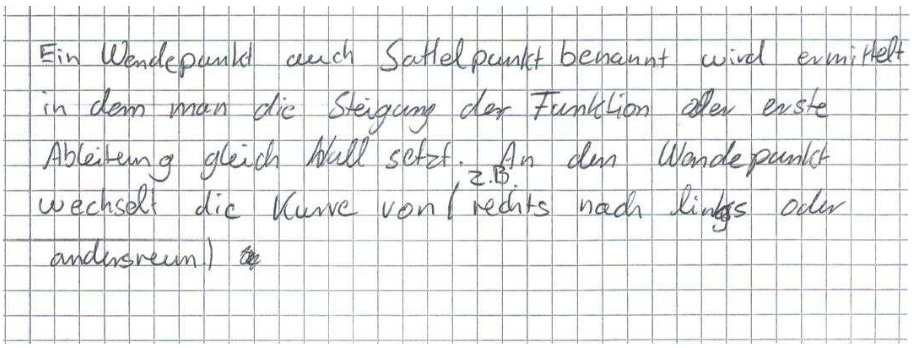

Ein Wendepunkt auch Sattelpunkt benannt wird ermittelt
in dem man die Steigung der Funktion aller erste
Ableitung gleich Null setzt. An den Wandepunkt
wechselt die Kurve von (z.B. rechts nach links oder
andersrum)

Abbildung 9.8: Hefteintrag von B

Auch wenn sich die Schülerinnen auf eine gemeinsame „Definition“ einigen, so scheint es doch, dass zu diesem Zeitpunkt die Vorstellungen, was jede Einzelne unter einem Wendepunkt versteht, voneinander abzuweichen. Für F ist die Vorstellung der Gleichheit von Wende- und Sattelpunkt in Verbindung mit der Eigenschaften „Tangentensteigung null“ vorherrschend. Dabei integriert sie aber gedanklich durchaus den für einen Wendepunkt typischen Kurvenwechsel. B sieht im Wendepunkt wesentlich den Wechsel von der Rechts-zur Linkskurve (oder umgekehrt) und bei S scheint das „passend denken“ zu der Idee zu führen, dass die Wendepunkte die lokalen Extrema sind, da es für sie hauptsächlich um einen Richtungswechsel geht. Extrempunkte sind für sie die absoluten Extrema, die „weit oben bzw. weit unten“ liegen. S setzt sich offenbar am wenigsten intenisv mit der Sache und den Argumenten der anderen auseinander, sie bleibt auch in der nächsten Phase bei ihrer Vorstellung und verteidigt diese vehement.

Zweiter Abschnitt:
„Wie rechne ich das dann aus?“ und andere offene Fragen
Zeilen 470 – 524

Die unterschiedlichen internen Deutungen des Wendepunkts führen zu weiteren Fragen und Ungereimtheiten, die im zweiten Gesprächsabschnitt zu Tage treten. Dieser Gesprächsabschnitt wird ausgelöst durch L´s Frage, was Extrempunkte überhaupt sind:

470 L: Wieso Extrempunkte – was ist das überhaupt/
471 B: Extrempunkte sind das wo diese Wendepunkte sind *macht eine Handbewegung wie*
472 *Buchstabe M*
473 L: Achso – da wo das am höchsten ist oder was/
474 F: *zu B* **Nein** – eben nicht die Wendepunkte \
475 B: Ne – nicht die Wendepunkte *zeigt mit dem linken Arm erst ganz hoch dann ganz*
476 *runter*
477 S: der Punkt, wo es am höchsten und am tiefsten ist *macht Handbewegung extrem*
478 *nach oben und extrem nach unten und malt auf den Tisch und stockt*
479 B: der hoch und am tiefsten ist, nicht Wendepunkte das ist ja bei dem hier der Fall
480 *malt auf den Tisch, Bewegung von Hoch- und Tiefpunkt, dabei stockt sie*
481 S: Dann kann es ja nur zwei haben oder immer ··· oder nicht/
482 B: Ja aber das sind doch auch automatisch rechts – *bei gleichzeitiger Handbewegung*
483 *eines Hochpunktes, stockt*
484 F: Ja – aber was die gemeinsam haben – ist dass ähm die Steigung da Null ist
485 B: Ja wie – wie rechne ich jetzt das eine aus und das andere aus – das ist doch
486 eigentlich das Gleiche
487 F: Ja das ist hier die große Frage/
488 *B lacht*
489 F: Das ist doch erklärt – an den Stellen, wo die ähm die erste Ableitung – blablabla –
490 blabla *F schlägt im Buch nach*
491 F: Ich hab´ die Seite verschlagen

Danach wird zunächst eine ganz andere, inhaltliche Frage von L geklärt. Dabei bleibt B aber in die Buchseite vertieft, die F ihr gereicht hat. Sie betrachtet jedoch auf dieser Seite nicht die Grafik, die F ihr eigentlich zeigen wollte (Abbildung 9.6), sondern betrachtet die darüber liegende Grafik (Abbildung 9.9), die ihr anscheinend hilft, ihr Problem zu verifizieren.

507 B: Das wendet doch da auch von einer Rechts- in eine Linkskurve – also muss es doch
508 da ein Sattelpunkt sein – *zeigt auf Abbildung 9.9*
509 F: Nee
510 B: Das mit der Rechts- oder Linkskurve ist eh Scheiße – was wir erzählt haben
511 B: Das ist doch nur da so – aber da ist es···
512 L: Wie bei Formel Eins ne/ – erst nach rechts dann nach links
513 S: Es wechselt doch einfach mal die Richtung

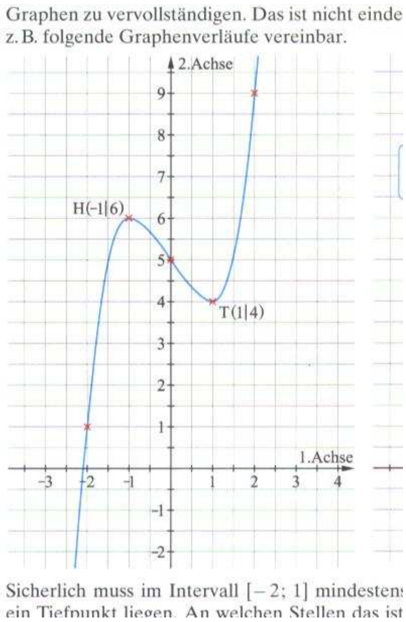


Abbildung 9.9: Grafik aus dem Schulbuch [Griesel/Postel 1999], S.192

B: Ja wie auch immer das mit den Kurven und dem Wechsel – das ist
B: Aber das wäre ja hier auch so von den Kurven da wechselt es ja auch *zeigt ins Buch auf Abbildung 9.6, S.192*
L: Was überlegst du eigentlich gerade – ich versteh das irgendwie gar nicht
B: zum Beispiel das – was hier an diesem Punkt hier ist
L: Ja – das ist der Schnittpunkt mit der y-Achse
B: Genau – und wie ist denn dort die Tangentensteigung/
F: Gibt es überhaupt ´ne Funktion 1. Grades/
L: Ja die Tangentensteigung hier – Hallo – Hörst du mir mal zu bitte – die müsste doch eigentlich hier so anliegen – oder nicht/
B: Dann würde die genau da lang gehen – dann wäre da ja keine T a n g e n t e mehr

Auch zu diesen Gesprächsabschnitten konnten aufgrund der Analysetabelle (vgl. Anhang F) die Begriffsbildungsprozesse der einzelnen Schülerinnen näher konturiert werden.

Insbesondere B stösst auf mehrere Dissonanzen. Sie ist diejenige, die erkennbar die Deutungsversuche der anderen aufnimmt und sich bemüht, sie mit ihren eigenen Vorstellungen zu verbinden. So scheint sie auch die lokalen Extrempunkte als Wendepunkte anzusehen – zumindest als zusätzliche Wendepunkte. Dies wird deutlich in Zeile 471, wo sie spontan auf L´s Frage nach den Extrempunkten antwortet: „Extrempunkte sind das, wo diese Wendepunkte sind“. Es zeigt sich auch in Zeile 511 („Das ist doch nur da so – aber da ist es. . . “), wo sie einmal die lokalen Extrempunkte und einmal den Wendepunkt meint. Trotz ihrer weiten Interpretation von Wendepunkt scheint B die Einzige zu sein, die das Konzept des Kurvenwechsels an einem Punkt festmachen kann. Dies will sie (noch) nicht aufgegeben. Ihre Vorstellung vermag sie durch eindeutige Handbewegungen auszudrücken (Zeilen 471 und 482). Im Unterschied zu den anderen zeigt sie damit, dass sie mit einer eher funktional-dynamischen Sicht die Graphen lesen und dabei gleichzeitig die Kurvenart (Linkskurve oder Rechtskurve) wahrnehmen kann. Dies ist bei keiner der drei anderen Schülerinnen erkennbar. Sie formulieren eine dynamische Sicht nur hinsichtlich der Richtung (zum Beispiel L in Zeile 512: „wie bei Formel 1 - erst nach rechts dann nach links“). Statische Aspekte nutzen die anderen drei nur, um bestimmte Werte oder Extrempunkteigenschaften zu benennen. Dazu gehören Äußerungen wie „Steigung null“ (bei F), „da, wo es am höchsten oder tiefsten ist“ (bei S und L), die meist ohne weiteren Erläuterungen dann genannt werden, wenn auf einen Punkt an einem Graphen (im Buch oder am Rechner) gezeigt wird.

Für B taucht jedoch die Schwierigkeit auf, dass Punkte, die sie als Wendepunkte ansieht, nicht das Kriterium „Tangentensteigung null“ aufweisen. Dies trifft bei dem Graphen zu, den sie im Schulbuch findet (Abbildung 9.9). Sie schafft es, diese Perturbation konkret zu formulieren (Zeile 520), jedoch wird der Gedankengang von den anderen dreien nicht aufgegriffen und kommt erst später im dritten Gesprächsabschnitt erneut zur Diskussion. F ist mit eigenen Gedanken beschäftigt. L reagiert zwar auf B, greift aber nicht den Kern von B´s Einwand auf, sondern wirft ein neues Problem auf, worauf B unmittelbar eingeht. Es ist die Irritation, dass sie zwar von Tangentensteigung spricht, aber die Wendetangente für sie „ja keine Tangente mehr“ (Zeile 524) ist, da die Tangente in diesem Punkt die Kurve schneidet und nicht nur „tangiert“. [2] Im Unterschied zu B und F bleiben die Schülerinnen L und S auch in diesem zweiten Gesprächsabschnitt bei der Deutung des Wendens als einer Richtungsänderung. L untermauert dies sogar mit dem Bild „wie bei der Formel Eins“ (Zeile 512).

[2] Diese Irritation ist vielfältig bekannt. Jahnke (1995) beschreibt, dass es auch für Bernoulli noch ein Problem war, ob die Wendetangente tatsächlich als Tangente zu betrachten ist. Da diese Frage nicht nur hier für viele Schülerinnen und Schüler auftritt, empfiehlt er die Lektüre eines Textstücks von Bernoulli im Unterricht.

Dritter Abschnitt:
„Dann geht es doch um eine Richtungsänderung?“
Zeilen 550 – 603

Es ist die Schülerin S, die die offenen Fragen noch einmal explizit aufgreift. Sie wiederholt die Frage, wie man nun Extrem- und Wendepunkte „herausfindet“. Auf diese Frage reagieren L und B, indem sie an ihren alten eigenen Fragen anknüpfen. L will wissen, ob das, worauf sie zeigt, Extrempunkte sind. B vertieft sich wieder in Abbildung 9.9 und fragt explizit, ob „das da ein Wendepunkt ist oder nicht“. So stehen am Anfang dieses Gesprächs zunächst drei unabhängige Dissonanzen bzw. Fragen (S: Zeile 550, L: Zeile 551 und B: Zeile 554ff).

550 S: Wie kriegt man diese Extrempunkte raus und die Wendepunkte /
551 L: Ich weiß noch nicht mal – was so ein Extrempunkt ist – ist das jetzt so ein Hochpunkt
552 und Tiefpunkt/ Ja,nee/
553 S: Ja\
554 B: Ich wollt zum Beispiel wissen, ob das da *zeigt auf den Graphen Abbildung 9.9*
555 S: jaha
556 B: ob das da zum Beispiel da ein Wendepunkt weil das von d e r Kurve *zeigt mit dem*
557 *Stift am Graphen in Abbildung 9.9 einen Bogen um den Hochpunkt* in d i e Kurve
558 *zeigt mit dem Stift am Graphen einen Bogen um den Tiefpunkt* übergeht – ne/

S scheint sich klar darüber, was Extrem- und Wendepunkte sind und möchte nur wissen, wie man diese bestimmt. Sie antwortet dementsprechend sicher auf B´s und L´s Fragen. Zuerst erhält L die Bestätigung, dass sie die Hoch- und Tiefpunkte richtig am Graphen gezeigt hat. Auch B wird bestätigt, jedoch mischt sich dann F ins Gespräch und fragt B nach dem Grund ihres Problems. Daraufhin nennt B zum ersten Mal ein Gegenargument zu F´s Vorstellung des Wendepunkts als Sattelpunkt, dass hier die Steigung nicht null ist. Leider kommt es zu keinem weiteren Austausch zwischen B und F, da S ihre Sicht der Dinge zur Lösung anbietet:

558 F: Ich weiß überhaupt nicht warum du damit ein Problem hast
559 B: Aber da ist die Steigung ja gar nicht Null
560 S: Das stimmt aber ich finde auch eher – dass Wendepunkte···
561 B: sind das und das *zeigt am Graphen in Abbildung 9.9 auf die beiden Extrempunkte*
562 F: Ne der Wendepunkt ist **da**\
563 B: Ja – das meine ich ja – aber da ist ja
564 S: Nein – das ist **kein** Wendepunkt – ab da *zeigt auf den Hochpunkt* wechselt es ja
565 die Richtung und da *zeigt auf den Tiefpunkt*
566 B: Da *zeigt auf den Hochpunkt* wechselt es einmal da oben – aber ab da *zeigt auf den*
567 *Wendepunkt* wechselt es doch auch
568 S: Nein

569 B: Natürlich von d e r Kurve *zeigt mit dem Stift am Graphen in Abbildung 9.9 einen*
570 *Bogen um den Hochpunkt* in d i e Kurve *zeigt einen Bogen um den Tiefpunkt*
571 F: Ja
572 S: Nein – das ist h i e r *zeigt auf den Hochpunkt*
573 B: Das ist doch so – als wenn er so fährt *zeigt Bogen um den Hochpunkt bis zum*
574 *Wendepunkt* und dann fährt er nach dort *zeigt ab dem Wendepunkt Bogen um den*
575 *Tiefpunkt* – eine Kurve nach dort – eine nach hier
576 S: Hier so – wenn es nach da *zeigt auf Hochpunkt* wechselt geht es runter und da
577 *zeigt auf Tiefpunkt* geht es wieder hoch
578 B: Aber es geht ja da - wenn du es ganz extrem darstellst geht es so und dann wieder
579 so – dann ist es dieser hier
580 L: Soll ich dir mal ein anderes Mathe-Buch holen/

S versucht, B davon zu überzeugen, dass die Wendepunkte die Hoch- und Tiefpunkte sind. F lehnt diese Interpretation intuitiv ab, indem sie auf den „richtigen“ Wendepunkt zeigt, ohne weiteres Benennen von Argumenten oder Erklärungen (Zeile 563) und durch Bestätigen von B´s ausführlicher Beschreibung in Zeile 471. In einem lebhaften Disput legen S und B jeweils ihre Sicht der Dinge dar. Dabei bezieht sich S auf einen Richtungswechsel und B auf den im mathematischen Sinn korrekten Kurvenwechsel. B sieht die Argumentation von S ein, dass es sich im Hochpunkt wendet, kann S aber nicht dafür gewinnen, dss es sich auch in dem anderen Punkt (dem eigentlichen Wendepunkt) wendet. S geht darauf nicht ein. Sie kann entweder die Idee des Kurvenwechsel nicht nachvollziehen oder lässt sich nicht auf die Ideen von B ein. Sie vertritt ihre Meinung nun vehement. Sie bleibt bei ihrer Interpretation, als sie zusammen mit B eine Grafik im Schulbuch ([Baum u.a. 2000]) anguckt. B hatte diese Seite zufällig aufgeschlagen (Zeile 597) und fühlte sich von der Grafik (Abbildung 9.10) direkt angesprochen, weshalb sie sie zur weiteren Klärung nutzt.

595 S: Das sind die ··· *zeigt auf die beiden Extremstellen im oberen Graphen von Abbildung*
596 *9.10*)
597 B: Ah ··· guck mal da sieht man´s auch, dass es nicht da ist *zeigt auf den Sattelpunkt*
598 *im mittleren Graphen von Abbildung 9.10*)
599 S: Ja ··· weil das doch ···
600 B: Ja, weil da von ´ner Rechts- in ´ne Linkskurve übergeht
601 S: N E I N
602 B: Ok – dann ist es nicht so – dann hat es auch nur die beiden Punkte ok
603 S: Mann mann mann ich hab mal was gegen B in Mathe richtig

Es geschieht das Erstaunliche, dass B die Sichtweise von S annimmt und die Idee des Kurvenwechsels als Besonderheit des Wendepunktes aufgibt. Dies tut sie, obwohl sie unmittelbar vorher immer wieder die Markanz des Punktes, indem die Kurve sich ändert, argumentativ betont und diesen Punkt

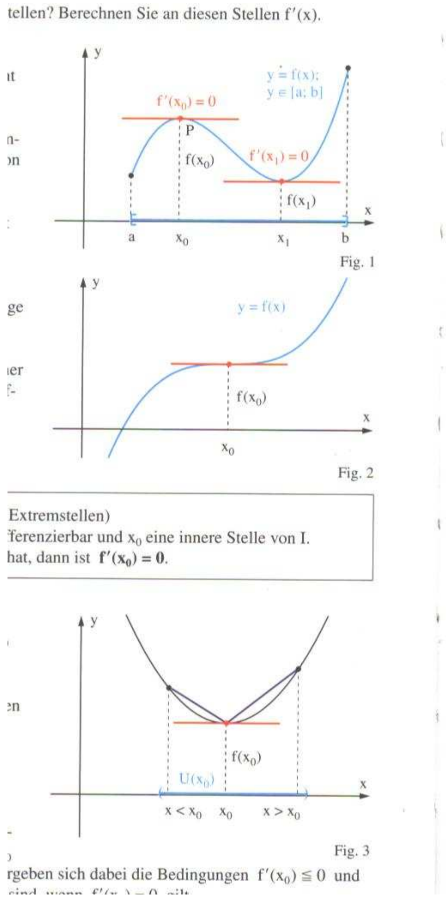


Abbildung 9.10: Grafik aus dem Schulbuch [Baum u.a. 2000], S.138

richtig in den jeweiligen Graphen gezeigt hat. S hat eine solch argumentative Kraft, dass sie nicht nur B, sondern auch F und L überzeugt und für ihre Sicht gewinnt. Diese Überzeugungskraft kann verschiedene Ursachen haben. Zum einen scheint insbesondere B von dem Bedürfnis nach einer Klärung der Dissonanzen getrieben, denn mit der Übernahme von S´Interpretation ist das Problem gelöst und auch für die anderen beiden Mitschülerinnen das Thema beendet. Man kann sich endlich wieder mit dem Ausfüllen der Tabelle beschäftigen. Zum anderen sind die Ideen von S verständlich und nachvollziehbar, ihre Ideen deshalb überzeugend. Gerade ihre Gedanken spiegeln die besonderen begrifflichen Schwierigkeiten wider, die in der Bezeichnung „Wendepunkt“ für diesen Kurvenwechselpunkt liegen, deshalb wird im Rahmen des nächsten Kapitels diese Problematik näher umrissen.

Die vorher im Heft festgehaltene Defintion wird trotz der neuen Interpretation nicht geändert. Dies kann entweder zur Ursache haben, dass man aus arbeitsökonomischen Gründen das bereits Erledigte nicht noch einmal aufgreifen möchte oder inhaltliche Gründe, dass die neue Deutung wirklich nur als eine neue Interpretation des „Wechselns von links nach rechts oder umgekehrt“ gesehen wird. Die vier Schülerinnen widmen sich im Weiteren dann der Erarbeitung der geforderten tabellarischen Übersicht in Baustein (vgl. Aufgabenstellung auf Seite 26). Dabei nutzen die Schülerinnen ihre „neue“ Interpretation von Wendepunkten aus. Im Laufe des weiteren Gesprächs gerät jedoch diese Interpretation noch einmal in Frage. Der Grund dafür ist, dass insbesondere für B und F die neue Interpretation des Wendepunkts mit den ursprünglichen intuitiven Vorstellungen sowohl von Extrempunkten als auch von Wendepunkten unvereinbar ist. Letztlich regt F an, die Lehrperson zu fragen, was dann zur endgültigen Klärung führt.

9.2.4 Erkenntnisse aus der Analyse

Intensität der Auseinandersetzung Alle vier Schülerinnen sind während des Gesprächs gedanklich integriert und beteiligen sich am Gespräch. Im Verlauf des Gesprächs werden die einzelnen Redeanteile länger, da Gedanken vollständiger verbalisiert werden und nicht nur Bruchstücke von Sätzen formuliert werden. Jede verfolgt zwar ihren eigenen Gedankengang, setzt sich aber dennoch mit den Gedanken der anderen auseinander und versucht diese in die eigenen Vorstellungen zu integrieren. Dabei sind folgende Prozesse der Begriffsklärung erkennbar:

Die Schülerin B bringt eine Idee des Wendepunktes aus dem vorherigen Unterricht mit, die wahrscheinlich durch die Besprechung einer Produktionsaufgabe geprägt ist (vgl. Abbildung 9.7). Diese Vorstellung ist für sie mit dem Wechsel der Kurvenart verbunden, was sie im Gespräch an mehreren Stellen einbringt und gegen Ende vertieft, da sie dann in der Lage ist, diese Markanz des Kurvenwechsels deutlich zu beschreiben. Ihren klaren Blick auf die Unterschiede zwischen Wende- und Extrempunkt nutzt sie zunehmend schlüssiger und stringenter, um diese Erkenntnis mit den Mitschülerinnen zu teilen. Dennoch lässt sie sich von ihrer Mitschülerin S dazu überreden, die Hoch- und Tiefpunkte als „Wendepunkte“ zu bezeichnen. Bei diesem Überreden herrscht B´s ungeduldiges Bedürfnis vor, dass die Frage nach dem Wendepunkt endlich geklärt und Einigung erzielt wird, damit die Arbeit weitergehen kann. Dieses Nachgeben ist erstaunlich, da B stichhaltig für die Unterscheidung zwischen dem Punkt des Kurvenwechsels und des Richtungswechsels argumentiert.

S fokussiert lediglich die Hoch- und Tiefpunkte und beharrt darauf, dass hier auch ein Wenden stattfindet und deshalb die Bezeichnung „Wendepunkt“ hier angebracht ist. Sie zeigt schon sehr früh diese Auffassung, da hier ein Richtungswechsel erfolgt. Sie beteiligt sich insgesamt am wenigsten an den inhaltlichen Diskussionen. Ihre Impulse und Fragen zielen in erster Linie darauf ab, Ergebnisse fest zu halten und die anderen von ihrer Meinung zu überzeugen. Dieses eher oberflächliche Weiterkommen in der Arbeit scheint ihr deutlich wichtiger als eine intensive Auseinandersetzung mit den Inhalten. So ist sie auch nicht bereit, sich inhaltlich mit B´s Einwänden zu beschäftigen, sondern beharrt auf ihrer Vorstellung, dass im Hoch- und Tiefpunkt „gewendet“ wird. Sie ist die einzige, bei der es keine Hinweise gibt, dass sie die Besonderheit des eigentlichen Wendepunktes erkannt hat.

F hat – ähnlich wie B – eine vage, intuitive Vorstellung aus dem vorherigen Unterricht, was ein Wendepunkt ist. Dabei ist sie aber nicht in der Lage, das Spezfische zu verbalisieren sondern bleibt auf der Ebene, an bestimmten Graphen die Wendepunkte im Unterschied zu den Extrempunkten zu zeigen. Dabei wird sie im Laufe des Gesprächs immer sicherer. Sie bringt durch Grafiken aus dem Schulbuch, auf die sie beim Nachschlagen stösst, die Irritation ins Spiel, dass Wendepunkt und Sattelpunkt synonym sind und im Wendepunkt die Tangentensteigung null ist. Sie lässt sich allerdings auf B´s Einwand ein, dass es Wendepunkte geben kann, die eine andere Tangeentensteigung aufweisen. Jedoch folgt sie B´s Nachgeben und lässt sich auf die von S vorgeschlagene Begriffszuweisung ein.

Bei der Schülerin L zeigen sich zu Beginn deutliche Hinweise, dass sie – ähnlich wie S – auch die Hoch- und Tiefpunkte als Wendepunkte und die Extrempunkte als die absoluten Extrema ansieht (Zeilen 4 und 257). Jedoch gerät diese Vorstellung im Laufe des Gesprächs ins Wanken – insbesondere durch die Interventionen von F (z.B. Zeile 5) und B´s Erinnern an die Produktionsaufgabe (Zeile 268). Dadurch nimmt auch sie im Laufe des Gesprächs die Unterschiede zwischen Extrem- und Wendepunkten wahr. Sie ist diejenige, die sehr stark Unterstützung und Bestätigung von den anderen einfordert und dabei sehr ungeduldig ist und es immer sehr schnell erreicht, dass F und B den eigenen Gedankengang unterbrechen und sich ihr widmen.

Auch wenn die Schülerinnen im Verlauf des untersuchten Gesprächs nicht zu den konsolidierten Bezeichnungen des Wendepunkts gelangen, so ist die Auseinandersetzung mit der Problematik sehr hoch. Die Unterschiede zwischen dem Wesen eines Extrempunktes und dem eines Wendepunktes werden vielfältig diskutiert. Der hohe Grad der Auseinandersetzung mit dem Problem zeigt sich auch in den selbst gewählten Veranschaulichungen (Kurvenwechsel, Handbewegungen, „Formel eins“) sowie an der Diskussionen auf der

Meta-Ebene um die Bezugsgröße des Wendens. Dabei werden die Probleme, die der Begriff „Wendepunkt“ semantisch in sich birgt, in besonderer Weise transparent. Vor allem zeigt sich, wie die individuellen Begriffsbildungsprozesse durch die Anmerkungen und Fragen der anderen neue Impulse erhalten.

Die Schwierigkeiten mit dem Begriff „Wendepunkt“ Dadurch, dass bei der Aufgabe das Zeichen selbst („Wendepunkt“) zum Objekt der Untersuchung wird, spielen freie, individuelle Assoziationen zum Wort „wenden“ ebenso wie Erinnerungen an unterrichtliche Erarbeitungen und Aspekte aus den benutzten Quellen (hier Schulbüchern) eine große Rolle. Dadurch bietet das Gespräch eine Fülle von Hinweisen auf begriffliche Schwierigkeiten und Verwechslungen und deren potenzielle Ursachen.

Es lassen sich drei Aspekte ausmachen, die das Verstehen dieses Begriffes erschweren:

- „Wenden“ wird in der Alltagssprache im Sinne von Umkehren, Umdrehen, von-einer-anderen-Seite-betrachten, Richtungswechsel-vornehmen, $\cdots$ interpretiert. Diese wird auch bei den Schülerinnen im Gespräch deutlich. Diese Bedeutungszuweisung führt bei einem direkten Transfer ins Mathematische eher zur Vorstellung des lokalen Extrempunktes, was ja auch im Gespräch letztlich als Begriffsklärung (Zeile 605) angenommen wird. Würde man in Gedanken einen Graphen ablaufen, so wäre der lokale Extrempunkt genau der Punkt, an dem man sich umdreht, „wendet“ - man ginge vor und zurück, hin und her.

- Es sind verschiedene Bezugsgrößen denkbar, auf die sich das Wenden beziehen kann - es können die Funktionswerte sein, es kann die Richtung oder eben die Kurvenart sein, die sich jeweils wendet. Dass sich das Wort „Wendepunkt“ in der konsolidierten mathematischen Fachsprache auf die Kurvenart bezieht, ist zunächst semantisch nicht naheliegend. Genau diese Falle erweist sich auch für die Schülerinnen und Schüler, die unbelastet und ohne Vorprägung an die Begriffe herangehen und das Wenden auf die Funktionswerte und die Steigung beziehen.

- Zum Verstehen des Begriffes „Wendepunkt“ muss eine Dynamik mitgedacht werden, um die Spezifik eines einzelnen (statischen) Punktes erfassen zu können. Diese Charakteristik des Punktes lässt sich nur veranschaulichen, wenn man den Graphen „gedanklich durchläuft“. Diese dynamische Sicht hilft sowohl bei der Interpretation des Wendepunktes als Punkt des Wechsels der Kurvenart wie auch bei der Interpretation als Punkt mit extremer Steigung. Die Schülerin B untermalt ihre Worte immer wieder durch Handbewegungen, um die Besonderheit des Punktes für die anderen und auch für sich selbst zu veranschaulichen.

Im Gegensatz zum „wenden“ ist der Begriff „extrem“ in allen drei Aspekten einfacher weil eindeutiger zu erfassen. Es sind keine Interferenzen mit dem alltäglichen Wortgebrauch von „extrem“ zu erwarten. Das Wort „extrem“ hat eine eindeutige Zuweisung im Sinne von „äußerst“ und maximal bzw. minimal, was auch die wesentliche Eigenschaft eines mathematischen „lokalen Extremas“ trifft. Auch ist die Bezugsgröße im mathematischen Kontext, auf die sich „extrem“ als Eigenschaft bezieht, unmissverständlich der Funktionswert. Das zeigt sich auch im Gespräch, da hierzu spontan Erklärungen gegeben und angenommen werden. Schwierig wird es allenfalls bei der Unterscheidung von lokalen und absoluten Extrema. Die Unterscheidung, dass es zwei verschiedene Arten von Extrema gibt, ist auch allen Schülerinnen im Gespräch klar. Nur werden – dem Vorschlag von S gemäß (Zeile 605) – die lokalen Extrema dann als die Wendepunkte und die absoluten als Extrempunkte gesehen. Auch wenn vorher die lokalen Extrema häufig als „Extrempunkte“ gezeigt und erkannt wurden, führt dies leider nicht dazu, dass der Vorschlag von S nicht sofort abgelehnt wird. Dies erfolgt erst später, als weitere begriffliche Dissonanzen auftreten.

Es wäre eine Untersuchung wert, inwieweit die Bezeichnungen in anderen Sprachen ähnliche Probleme aufweisen oder nicht. Im Englischen, Französischen, Spanischen wird zum Beispiel der Wendepunkt als „Beugungspunkt“ (inflection point, point d´inflexion, el punto de inflexión) bezeichnet, wobei auch hier beim freien Assoziieren zum Begriff „Biegung“ oder „Beugung“ ähnliche Verwechslungen denkbar sind. Eindeutiger scheint hier der russiche Begriff des „Kurvenpunkts“.

Auch die historische Variante des Wendepunktes als dem Punkt, in dem es von konkav zu konvex wechselt, liefert eine eindeutigere Interpretation und ist damit für das Verstehen leichter. Die Unterscheidung zwischen „konkav“ und „konvex“ geht auf Johan Bernoulli zurück, der nach Jahnke (1995) als erster den Begriff „Wendepunkt“ in seinem ersten Lehrbuch der Differentialrechnung (1692) geprägt hat. Das Studium dieser Texte erhellt noch einmal auf andere Weise die Spezifik des Wendepunktes. Dort heißt es (hier nach einer Übersetzung von Schafhatlein, zitiert nach Jahnke (1995), S.48):

Über die Auffindung des Wendepunktes der Kurven

Es gibt gewisse Kurven, die eine zweifache Krümmung haben, zuerst

> *nämlich gegen die Achse konkav und nachher konvex gegen sie oder umgekehrt, erst konvex und zuletzt konkav; derjenige Punkt, der jene beiden Krümmungen trennt, der das Ende der ersten und der Anfang der folgenden ist, heißt Wendepunkt oder Rückkehrpunkt.*

Auch wenn diese Beschreibung für den Fall der waagerechten Tangente für unser heutiges Begriffsverständnis schwierig ist, so liefert sie doch eine zusätzliche Visualisierung, um das Besondere des Wendepunktes zu erfassen. Die Interpretation des Wechsels zwischen konkav und konvex ist in heutigen Schulbüchern kaum noch zu finden, wurde aber zum Beispiel im Schulbuch von Danchwerts/Vogel (1986, S. 80ff) noch benutzt, um Schülerinnen und Schüler ganz unterschiedliche Interpretationen des Wendepunktes anzubieten.

Noch vielfältiger als beim Wort ”wenden“ sind die allgemeinen, begrifflichen Vorstellungen zu „Sattel“. So finden sich in allgemeinen Lexika (z.B.[Brockhaus 1996-99]) in der Regel Erklärungen wie Sitzvorrichtung für Reiter, Fahrrad, Motorrad; Senke in einem Bergrücken; Querleiste bei Streich-u. Zupfinstrumenten. Alle diese Bilder deuten nicht eindeutig auf den mathematischen Sattel hin – sondern können ebenso einen Extrempunkt nahelegen. Selbst wenn man Mathematiklehrerinnen und -lehrer nach „Sattel“ befragt, wird das Bild nicht eindeutig vom mathematischen Sattel bestimmt und bleibt die Vielfalt der Bilder bestehen. So haben 10 befragte Lehrpersonen auf die Frage „Welches außermathematische Bild assoziieren Sie beim Sattelpunkt?“ im Wesentlichen genannt:

- „Ein Pferderücken von der Seite - da ist der Sattelpunkt der Punkt, wo der Sattel liegt!“
- „Ein Reitsattel von hinten - aber das ist eher ein Extrempunkt!“
- „Ein Reitsattel von der Seite, da der Haltegriff die Kurve wieder nach oben lenkt!“
- „Ein Chio Chip als dreidimensionaler Funktionsgraph“

Auch diese Assoziationen weisen nicht eindeutig auf den mathematischen Sattelpunkt, sondern ebenso auf den Extrempunkt hin. Im hier untersuchten Gespräch wurde diese Verwechslungsgefahr noch dadurch verstärkt, dass im benutzten Schulbuch die Sattelpunkte sehr nahe mit Extrempunkten dargeboten werden und die im Unterricht besprochene „Produktionsaufgeb“ einen

Sattelpunkt aufwies. Bei der ersten Erwähnung des Sattelpunktes im Schulbuch stehen sie neben den Extrempunkten, um die gemeinsame Steigungs-Eigenschaft zu pointieren(vgl. Abbildung 9.6). Dies greift die Schülerin F auf, um ihre Vorstellung der Synonymität von Wendepunkt und Sattelpunkt zu verfestigen.

9.3 Vergleichende Analyse von Klausurlösungen

Die Schülerinnen und Schüler des Kurses, die im Rahmen der qualitativen Studie begleitet und beobachtet wurden, nahmen unmittelbar nach dem Einsatz der Lernwerkstatt im Unterricht an einer zentralen Vergleichsklausur des Landes Nordrhein-Westfalen teil (Arbeitsblatt im Anhang B). Im Rahmen dieser Klausur hatten sie drei Aufgaben aus dem Bereich Analysis zu bearbeiten. Auch die drei Parallelkurse der Schule, in denen die Thematik nach eigener Einschätzung der Lehrpersonen klassisch unterrichtet wurde, schrieben diese Vergleichsklausur mit. Sämtliche Arbeiten aller vier Kurse wurden in Kopie zur Auswertung im Rahmen des Forschungsprojektes der Universität zur Verfügung gestellt. Die Kopien wurden erstellt, bevor die jeweilige Lehrperson die Korrektur durchführte.

Bei der Korrektur im Rahmen der Auswertung an der Universität wurden die Hinweise und Bewertungsvorschläge zur Punktevergabe genutzt, die von der Bezirksregierung vorgegeben waren. Insgesamt waren die Punkte-Ergebnisse der vier Gruppen vergleichbar – sowohl bei den Korrekturen an der Universität als auch bei den späteren Korrekturen durch die Lehrpersonen an den Schulen. Jedoch fiel bei den Lösungen des Experimentalkurses im Vergleich zu den Parallelkursen auf, dass individuellere Wege und Formulierungen gewählt wurden. Dies zeigte sich besonders deutlich bei Aufgabe 2, weshalb eine eingehende Analyse der Lösung zu dieser Aufgabe angebracht schien. Es ging dabei darum, in einer vorgegebenen Graphik (Abbildung 9.11) den passenden Graphen zum Term $f(x) = x(x-2)^2$ zu finden.

Zunächst fiel beim Korrigieren auf, dass die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe eher als die Schülerinnen und Schüler der Vergleichsgruppen ihre Lösung mit einem Antwortsatz begonnen haben, wogegen bei vielen Schülerinnen und Schülern der Vergleichsgruppen die explizite Antwort am Schluss stand. Die beiden Schülerbeispiele in den Abbildungen 9.12 und 9.13 mögen diese unterschiedlichen Wege verdeutlichen. Die meisten Lösungen konnten eindeutig einem dieser beiden Wege zugeordnet werden.

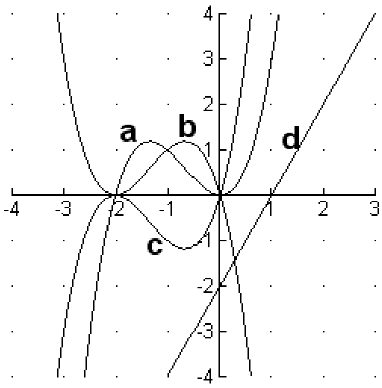
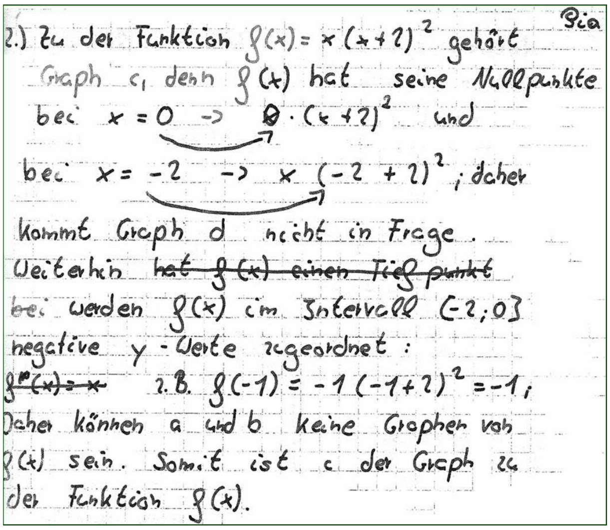


Abbildung 9.11: Graphik zu Aufgabe 2 der Vergleichsklausur



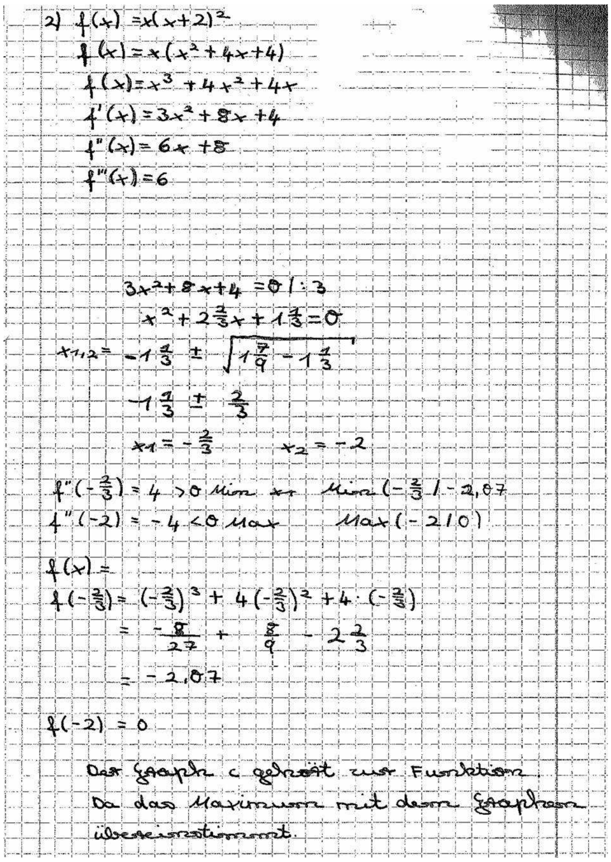
Pia

2.) Zu der Funktion $f(x) = x(x+2)^2$ gehört Graph c, denn $f(x)$ hat seine Nullpunkte bei $x = 0 \to 0 \cdot (x+2)^2$ und bei $x = -2 \to x(-2+2)^2$; daher kommt Graph d nicht in Frage. Weiterhin ~~hat f(x) einen Tiefpunkt bei~~ werden $f(x)$ im Intervall $[-2;0]$ negative y-Werte zugeordnet: ~~f''(x) = x~~ z.B. $f(-1) = -1(-1+2)^2 = -1$; Daher können a und b keine Graphen von $f(x)$ sein. Somit ist c der Graph zu der Funktion $f(x)$.

Abbildung 9.12: Schülerlösung, die mit dem Antwortsatz beginnt

Die Quantifizierung bestätigt den ersten Eindruck, dass die Schülerinnen und Schüler, die die Thematik in der Lernwerkstatt erarbeitet haben, eher die Lösung mit dem Antwortsatz beginnen (vgl. Abbildung 9.14).

Bei den meisten Schülerinnen und Schülern ist davon auszugehen, dass die Lösung direkt in Reinschrift verfasst und nicht zunächst als Konzept vorgeschrieben wird. Dazu fehlt in der Regel die Zeit. Zum anderen müssten dann die endgültigen Niederschriften äußerlich ordentlicher sein. Dies ist



2) $f(x) = x(x+2)^2$

$f(x) = x(x^2+4x+4)$

$f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$

$f'(x) = 3x^2 + 8x + 4$

$f''(x) = 6x + 8$

$f'''(x) = 6$

$3x^2 + 8x + 4 = 0 \mid :3$

$x^2 + 2\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3} = 0$

$x_{1,2} = -1\frac{1}{3} \pm \sqrt{1\frac{7}{9} - 1\frac{1}{3}}$

$-1\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}$

$x_1 = -\frac{2}{3}$ $x_2 = -2$

$f''(-\frac{2}{3}) = 4 > 0$ Min   Min$(-\frac{2}{3} \mid -2{,}07$

$f''(-2) = -4 < 0$ Max   Max$(-2 \mid 0)$

$f(x) =$

$f(-\frac{2}{3}) = (-\frac{2}{3})^3 + 4(-\frac{2}{3})^2 + 4 \cdot (-\frac{2}{3})$

$= -\frac{8}{27} + \frac{8}{9} - 2\frac{2}{3}$

$= -2{,}07$

$f(-2) = 0$

Der Graph c gehört zur Funktion
Da das Maximum mit dem Graphen
übereinstimmt.

Abbildung 9.13: Schülerlösung, bei der der Antwortsatz am Schluss steht

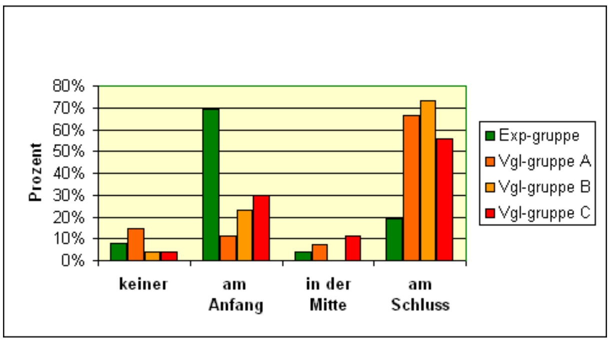


Abbildung 9.14: Steht der Antwortsatz am Anfang oder am Ende der Lösung?

erfahrungsgemäß nicht der Fall und insbesondere auch nicht bei den hier vorliegenden Klausuren. Geht man nun von dieser Annahme aus, so impliziert ein Beginnen mit dem Antwortsatz, dass die Lösung allein durch das Betrachten der Gegebenheiten erfasst wird und weitere Berechnungen oder Ausarbeitungen allenfalls zur Begründung, nicht aber zur Lösung des Problems notwendig sind. Dazu müssen aber sowohl Graph als auch Term auf den ersten Blick gleichermaßen und vernetzend wahrgenommen werden. Ein anderer Weg wäre, als Ausgangspunkt der Lösung zunächst hauptsächlich den Term zu fokussieren. Diese beiden prinzipiellen Lösungswege lassen sich bei den Schülerinnen und Schüler erkennen, die zu einer Erklärung führen, warum der Antwortsatz am Anfang oder am Ende steht:

- **Fokus auf den Term**:
  Man geht vom Term aus, berechnet die markanten Eigenschaften (z.B. besondere Punkte) und sucht dann in der Grafik, zu welchem Graphen die Eigenschaften passen.

- **Wechsel Graph – Term**:
  Ausgangspunkt der Betrachtung ist der Graph, der auf einzelne markante Eigenschaften untersucht wird. Dann wird überprüft, welcher Term diese Eigenschaft induziert. Man wechselt wieder zum Graphen und fokussiert die nächste Besonderheit. Dieses Wechselspiel kann sich mehrmals vollziehen.

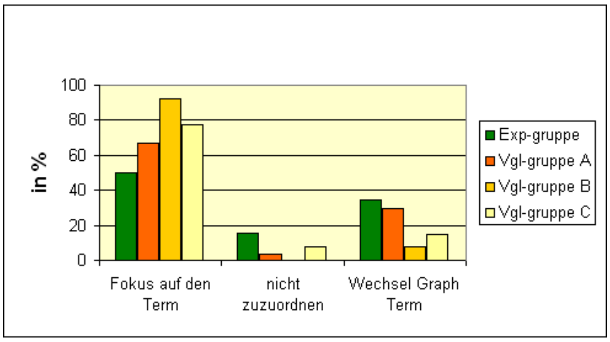


Abbildung 9.15: Grundsätzliche Lösungswege

Der zweite Weg ist sicher der effizientere und deutlich kürzere in der Dokumentation. Die Besonderheiten und Muster sowohl des Terms als auch des Graphen müssen dabei schnell erfasst und wechselseitig überprüft werden. Dies lässt sich jedoch nur dann schließen, wenn man davon ausgeht, dass die Schülerinnen und Schüler die Lösung direkt in Reinschrift verfasst haben. Dabei können verschiedene Erkenntnisse vorliegen:

- Das Erkennen der typischen Formen der Graphen in Bezug auf verschiedene Arten von Termen führt zu einem direkten Ausscheiden der Geraden d, da sie das Bild einer linearen Funktoin darstellt. Die anderen drei Graphen bleiben danach als potentielle Kandidaten erhalten, da sowohl die drei Terme als auch die drei Graphen zu ganzrationalen Funktionen dritten Grades gehören.

- Das direkte Ablesen der Nullstellen *0* und *(-2)* am Term und an den Graphen führt ebenfalls dazu, Graph d auszuschließen.

- Die Kenntnis über mehrfache Nullstellen und die Fähigkeit, diese am Term und am Graphen zu erkennen, schränken die Zahl der möglichen Kandidaten weiter ein. Danach scheidet auch Graph a aus.

- Das Überprüfen einzelner Punkte, ob ihre Werte die gegebene Gleichung erfüllen, kann als Strategie unmittelbar zum Ausschließen von Graphen führen. Dazu gehört auch, dass nur grob abgeschätzt wird, in welchem Bereich der Graph zu dem gegebenen Term positive oder negative Werte aufweist.

Weitere Untersuchungen, wie zum Beispiel die Lage der Extrempunkte, benötigen mehrere Gedanken- oder Bearbeitungsschritte, da sie nicht an beiden Darstellungsarten gleichermaßen schnell abzulesen sind. So ist zwar die ungefähre Lage der Extrempunkte in den Graphen a, b und c direkt erkennbar, jedoch gelingt das am Term nicht ohne weitere Rechnung.

Die nähere Untersuchung der Klausuren hat gezeigt, dass mehr Schülerinnen und Schüler des Experimentalkurses als der Vergleichskurse diesen Wechsel in der Betrachtung von Graph und Term vollziehen, was in Abbildung 9.15 erfasst ist.

Auffallend ist, dass die Strategie, zunächst den Term zu fokussieren, bei einer großen Anzahl der Schülerinnen und Schüler in den Vergleichsgruppen als Schema der Kurvendiskussion auftritt (vgl. 9.16). Die Abbildung 9.13 zeigt eine solche Schülerlösung. Dies ist sehr erstaunlich, da der vergleichsweise hohe Aufwand dieses Prozederes für die Lösung der Aufgabe nicht gerechtfertigt ist, weil er viele überflüssige, teils umfangreiche Schritte enthält. Dass dieses Schema dennoch verwendet wird, kann nur dadurch erklärt werden, dass im Rahmen des Analysis-Unterrichts vor allem dieses Schema kennen gelernt und geübt wurde. Die Häufigkeit der Anwendung des Schemas „Kurvendiskussion“ tritt bei den drei Vergleichskursen unterschiedlich stark auf – in einem Kurs sind es „nur“ 20% der Schülerinnen und Schüler sind, die das Schema anwenden und in den beiden anderen beiden Kursen je ca. 40 %.

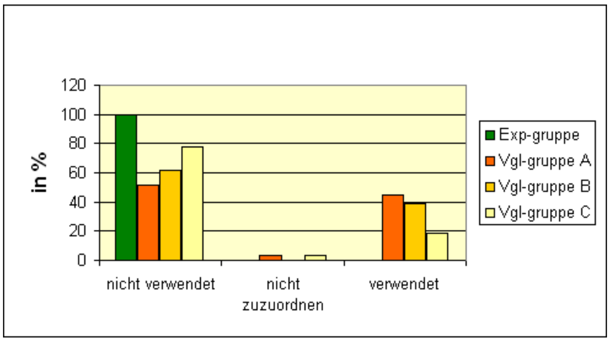


Abbildung 9.16: Verwendung des Schemas „Kurvendiskussion“

Dies gibt Anlass zur Vermutung, dass im ersten dieser drei Kurse der unterrichtliche Schwerpunkt nicht so stark auf das Schematische der klassischen Kurvendiskussion gelegt wurde wie bei den anderen beiden Kursen.

Insgesamt zeigt die vergleichende Analyse dieser Klausur-Aufgabe, dass die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe über bessere Kompetenzen sowohl in der Graphen- wie auch in der Termerkennung verfügen. Die bessere Graphenerkennung kann damit zusammenhängen, dass die Schülerinnen und Schüler durch die Verfügbarkeit von grafikfähigen Rechnern häufiger Graphen selbstständig erzeugen, betrachten und analysieren konnten. Diesen Effekt haben bereits Ruthven (1990) und Schwarz/Hershkowitz (1999) beschrieben. Sie konnten im Rahmen von Vergleichsstudien bei Lerngruppen, die grafikfähige Taschenrechner zur Verfügung hatten, ebenfalls bessere Graphenerkennung und Graphenanalyse diagnostizieren.

Durch die große Varianz an Aufgabenstellungen im Rahmen der Lernwerkstatt kann dieser Effekt noch verstärkt werden. So war die bessere Termerkennung zum Beispiel in Baustein N (vgl. Seite 30) ein bewusstes Ziel, um Nullstellen bei verschiedenen Arten von Termen möglichst effizient zu bestimmen. Hier waren auch Terme ganzrationaler Funktionen in verschiedenen Weisen vorgegeben - als Summen ebenso wie als Produkte. Dadurch sollte der Blick geschärft werden, wann welches Vorgehen der Nullstellenbestimmung sinnvoll und effizient ist.

Kapitel 10

Die Auswertung der experimentell-quantitativen Studie

10.1 Die Auswertung des vergleichenden Abschlusstests

Im Schuljahr 2003/04 haben 45 Kurse die Lernwerkstatt im Rahmen der quantitativen Studie eingesetzt. Die beteiligten Kurse wurden am Ende des Schuljahres eingeladen, sich einem abschließenden Vergleichstest zu unterziehen. Inhalt dieses Abschlusstests waren zwei Aufgaben aus ehemaligen offiziellen Vergleichsklausuren aus NRW, um so eine Anforderung von außen als Maßstab zu stellen.

Von dieser offiziellen Vergleichsklausur lagen die jeweiligen erreichten Mittelwerte der einzelnen Aufgaben vor.

Vergleicht man nun die gemittelten Ergebnisse (in %) der offiziellen Vergleichsklausuren mit denen des hier geschriebenen Abschlusstests, so ergibt sich folgendes Bild (Abbildung 10.1 und Tabelle 10.1):

Da von der Vergleichsgruppe nur Mittelwerte vorlagen, wurden auch von der Experimentalgruppe nur die Mittelwerte zum Vergleich herangezogen. Nach Abwägen aller Einflussfaktoren kann aus diesem Ergebnis geschlossen werden, dass die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe die Anforderungen der zentralen Vergleichsklausuren in diesem Themenbereich mindestens so gut erfüllen wie die Schülerinnen und Schüler der Vergleichsgruppen.

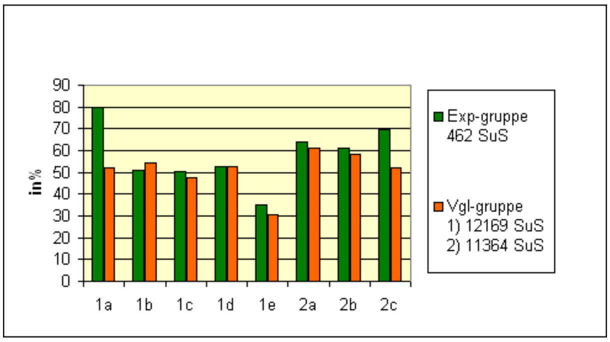


Abbildung 10.1: Ergebnisse des Abschlusstests

Aufgabe	Experimentalgruppe	Vergleichsgruppe
1a	79,98%	52,20%
1b	51,00%	54,20%
1c	50,63%	47,40%
1d	52,81%	52,60%
1e	35,03%	30,30%
2a	63,84%	61,00%
2b	61,33%	58,25%
2c	69,62%	52,33%

Tabelle 10.1: Ergebnisse des Abschlusstests

Auffällig ist das deutlich bessere Abschneiden der Experimentalgruppe bei Aufgabe 1a. Bei dieser Aufgabe ging es um eine Graphenanalyse. Das bessere Abschneiden bei dieser Art Aufgabe vertieft einmal mehr die Erkenntnisse, die bereits bei der vergleichenden Analyse von Klausurlösungen im Rahmen der qualitativen Studie (vgl. Kapitel 9.3) aufgezeigt wurden. Die Schülerinnen und Schüler, die die Thematik anhand der Lernwerkstatt erarbeitet haben, verfügen über eine bessere Graphen- und Termerkennung als die Schülerinnen und Schüler der Vergleichsgruppen.

10.2 Konzeption der Abschlussbefragung

Die beteiligten Kurse, die im Rahmen des Forschungsprojektes mit der Lernwerkstatt im Unterricht gearbeitet haben, haben nach diesem Unterricht einen Fragebogen online und anonym beantwortet. Es gab je einen Fragebogen für die beteiligten Lehrpersonen und für die Schülerinnen und Schüler (vgl. Anhang D).

Die Pilotierung der Fragebögen erfolgte in sechs Kursen, die auch das Material zur Lernwerkstatt getestet hatten. Zudem wurden beide Fragebögen einer informellen Überprüfung durch Mitarbeiter des soziologischen Instituts der Universität Duisburg-Essen unterzogen.

Ziel beider Fragebögen[1] ist es, die Sicht der Lernenden und Lehrenden in Bezug auf das Forschungsinteresse zu eruieren. Es geht also darum zu erfassen, welche kognitiven Schülertätigkeiten nach Einschätzung der Akteure bei der Arbeit mit der Lernwerkstatt angeregt wurden. Die Schwierigkeit besteht darin, dass dieses zentrale Forschungsinteresse begrifflich schwierig zu transferieren ist bzw. nicht davon ausgegangen werden kann, dass Lehrende und erst recht Lernende mit dem Begriff „Schülertätigkeiten“ eine klare Vorstellung verbinden. Unterrichtliches Vorgehen wird in der Praxis selten hinsichtlich des Wahrnehmens und Einschätzens von individuellen kognitiven Tätigkeiten reflektiert. Auch wenn diese Blickrichtung durch die aktuelle Diskussion um Bildungsstandards und Kompetenzen ([PISA 2000],[KMK 2003]) wächst, war für die hier befragten Teilnehmenden zum Zeitpunkt der Befragung (meist Sommer 2004) diese Sichtweise auf unterrichtliches Handeln neu und nicht zu erwarten. Aus diesem Grund und auch um das Ausfüllen der Fragebögen zu erleichtern, wurden als Grobstruktur des Fragebogens die potentiellen Bereiche der Rückmeldungen der Lernenden und Lehrenden gewählt. Auf diesem Tableau galt es dann, Frageformate zu wählen, die Rückschlüsse hinsichtlich der verschiedenen Tätigkeitsbereiche erlauben und direkt oder indirekt Aufschluss über das Forschungsinteresse ermöglichen. Deshalb galt es zunächst, die zu erwartenden Aspekte der Rückmeldungen zu antizipieren, was bei der Pilotierung geschah. Dabei gaben die Lehrpersonen Rückmeldungen zu folgenden Punkten:

- Gesamteindruck der Lernwerkstatt, dabei vor allem Verhalten der Schülerinnen und Schüler
- Optimierung des Materials durch Verbessern von Tipp- und Rechenfehlern sowie Detailveränderungen in manchen Fragestellungen und im organisatorischen Ablauf
- Besondere Aspekte hinsichtlich der Dokumentation auf Plakaten und in den Heften

Die Schülerinnen und Schüler formulierten Rückmeldungen zu folgenden Punkten:

[1]Die Fragebögen finden Sie im Anhang D.

- Gesamteindruck der Lernwerkstatt
- Spezielle Situation in der eigenen Gruppe
- Leistungsanstieg, -abfall
- Arbeitsaufwand
- Konkrete Rückmeldung zu einzelnen Aufgaben (besonders zu Fehlern)
- Optimierung des Ablaufs

Einerseits sollten die Fragebögen diese Aspekte widerspiegeln, um das Ausfüllen motivierend und zufriedenstellend zu gestalten, andererseits sollte ein direkter Fokus auf die Schülertätigkeiten integriert werden. Entsprechend dem Forschungsinteresse ging es darum, ob die bei der Konzeption intendierten Schüleraktivitäten tatsächlich durch das Gesamtarrangement angeregt werden oder nicht. Dazu gehören wie bereits in Kapitel 5.3 ausgeführt - die folgenden Tätigkeiten:

- Tätigkeiten des **Rezipierens**: berechnen, Formel anwenden, ausführen, zuhören, nachvollziehen
- Tätigkeiten des **Darstellens**: mathematisch darstellen (in Term, Graph, Tabelle und Wort), wechseln zwischen verschiedenen Darstellungsformen wie zum Beispiel visualisieren
- Tätigkeiten des **Analysierens**: enkodieren von gegebenen Texten und Darstellungen, interpretieren, strukturieren
- Tätigkeiten des **Reflektierens**: vergleichen, einen Lösungsweg unter veränderten Gesichtspunkten neu durchdenken, vernetzen
- Tätigkeiten des **Kreierens**: neue Aspekte einbeziehen, neue Blickrichtungen versuchen, Beispiele ausdenken und finden, systematisieren, generalisieren, vernetzen, recherchieren

Die Harmonisierung zwischen antizipierten Interessenbereichen der Akteure und Forschungsinteresse erfolgte durch folgende Festlegung: Die äußere Struktur des Fragebogens sollte die zu erwartenden Bereiche in Anlehnung an die oben aufgeführten Aspekte der Lernenden und Lehrenden aufgreifen und die innere Struktur, das Format der einzelnen Items, sollte gezielt den Blick auf die Schülertätigkeiten lenken. So ergaben sich zum Beispiel für den Schülerfragebogen bezüglich der äußeren Struktur folgende Kategorien:

- Einstellung zu Mathematik (Item 1)
- Allgemeiner Eindruck der Lernwerkstatt (Item 2-3)
- Einzelne Bausteine und Inhalte (Item 4-19)
- Unterrichtsform (Item 20-33)
- Rechnereinsatz (Item 34-38)
- Arbeitsorganisation (Item 39-47)
- Allgemeine Angaben (Item 48-53)
- Anmerkungen (Item 54)

Mit den folgenden beiden Item-Formaten soll in beiden Fragebögen der Fokus auf die Schülertätigkeiten gerichtet werden:

- Es wird eine Liste von Tätigkeiten vorgegeben (vgl. Tabelle 10.2), die es unter bestimmten Gesichtspunkten anzukreuzen gilt, Mehrfachnennungen sind möglich. Dieses Format findet sich in zwei Items, die im Schüler- und Lehrerfragebogen identisch sind (Fragen 18 und 19 im Schülerfragebogen, Fragen 16 und 18 im Lehrerfragebogen). Durch dieses Format kann der Begriff „Schülertätigkeiten“ einerseits ansatzweise erklärt wie auch die jeweilige Einschätzung erfragt werden.
- Es werden einzelne Statements vorgegeben, die es auf einer Skala von -3 bis +3 zu bewerten gilt. Dabei steht -3 für „stimme gar nicht zu“ und +3 für „stimme voll zu“. Es wird bewusst eine ungerade Anzahl von Skalierungsschritten gewählt, um die Möglichkeit zu gewähren, mit unentschieden zu antworten. Die Spezifizierung des negativen wie positiven Skalenbereichs in drei Unterbereiche erlaubt es zudem, einer extremen Zustimmung bzw. Ablehnung Ausdruck zu verleihen. Bei der Formulierung der Statements wurde bewusst eine Annäherung an die verschiedenen Schülertätigkeiten versucht.

Insgesamt kommen vier verschiedene Antwortformate in den Fragebögen vor:

- 34 Items im Schülerfragebogen bzw. 25 Items im Lehrerfragebogen geben eine Ratingskala vor, wobei von einer äquidistanten Unterteilung zwischen den einzelnen Schritten ausgegangen werden kann und sich damit die Skalen auch metrisch interpretieren lassen. Es wurde eine

19. Bei welchen Tätigkeiten konnten Sie Fortschritte durch die Lernwerkstatt erzielen? (Mehrfachnennung möglich!)

A	[ ]	strukturieren von Informationen
B	[ ]	abschreiben von Informationen
C	[ ]	analysieren; genaues Hingucken
D	[ ]	eigene (Lösungs-)ideen entwickeln
E	[ ]	Mathematik in eigene Worte fassen
F	[ ]	sich gegenseitig erklären
G	[ ]	wiederholen
H	[ ]	nachschlagen (im Schulbuch, Internet oder Lexika)
I	[ ]	„schmarotzen“
J	[ ]	nachvollziehen von Gedanken
K	[ ]	dokumentieren und Heft führen
L	[ ]	Graphen zeichnen
M	[ ]	über Mathematik reden
N	[ ]	zuhören
O	[ ]	Arbeit organisieren
P	[ ]	üben

Tabelle 10.2: Beispiel-Item für die Einschätzung zu den Schülertätigkeiten

7er Skala gewählt. Mit der Wahl einer ungeraden Anzahl von Skalierungsschritten sollte die Möglichkeit gewährt werden, auch mit unentschieden antworten zu können und durch die Ausweitung auf sieben Schritte waren auch extreme Bewertungen möglich.

- 13 Items im Schülerfragebogen bzw. 15 Items im Lehrerfragebogen geben Felder zum Ankreuzen vor, wobei Mehrfachnennungen möglich sind. Hierzu gehören zum Beispiel die bereits erwähnten Fragen zu den Schülertätigkeiten und Einschätzungen zu den einzelnen Teilen des Materials.

- 6 Items im Schülerfragebogen bzw. 2 Items im Lehrerfragebogen beziehen sich auf Angaben zur Person bzw. Klasse und bieten nur jeweils eine Antwortmöglichkeit – entweder durch Ankreuzen oder eindeutige Nennung.

- Daneben gibt es Items mit freier Antwortmöglichkeit. Damit ist insbesondere denjenigen, die in den vorstrukturierten Items des Fragebogens keine Möglichkeit sehen, ihre Kritik und Eindrücke zu äußern, ein Forum für individuelle Rückmeldung gegeben. Deshalb steht bei beiden Fragebögen als letztes Item „Anmerkungen“ für freie, unbegrenzte Äußerungen. Im Lehrerfragebogen gibt es zudem zwei weitere Items mit freier Antwortmöglichkeit – zum Nennen weiterer Schülertätigkeiten, die besonders gefördert wurden oder zu kurz kamen.

Neben den inhaltlichen waren auch äußere Kriterien für die Konzeption der Fragebögen wichtig, die sich auf die formale Gestaltung der Fragebögen beziehen:

- Die Fragen sollten klar, verständlich und eindeutig formuliert sein.
- Die Gesamtstruktur sollte übersichtlich und transparent sein.
- Die Formulierungen der Items sollten im Gesamt ausgewogen sein – insbesondere die Formulierungen der zu beurteilenden Statements sollten keine Sichtweise unbewusst präferieren.
- Wesentliche Aspekte sollten durch Hinzunahme von Kontroll-Items gestützt werden.

10.3 Auswertung des Schüler-Fragebogens

Der Schülerfragebogen wurde insgesamt von 578 Schülerinnen und Schülern beantwortet. Im Folgenden werden die Ergebnisse der Auswertung dargestellt nach den verschiedenen Antwortformaten bzw. Auswertungsverfahren:

- In Kapitel 10.3.1 werden die Ergebnisse der Auswertung der 34 Items mit Ratingskala beschrieben.
- Kapitel 10.3.2 fasst die wichtigsten Erkenntnisse aus den **freien Anmerkungen** zusammen.

Die beiden Items zur Beurteilung der einzelnen Bausteine und zur Einschätzung der Schülertätigkeiten werden im Vergleich zu den enstprechenden Lehrerantworten in Kapitel 10.5 dargestellt.

10.3.1 Auswertung der Items mit Ratingskalen

Ausgehend von der Forschungsfrage und den unterrichtlichen Zielen lassen sich verschiedene Einzelaspekte zur Auswertung der Items mit Ratingskalen explizieren. Das inhaltliche Interesse dieser Items ist es, in Anlehnung an die theoretische Fundierung des Unterrichtsmaterials die Einstellungen der

Schülerinen und Schüler zu Inhalt der Unterrichtsreihe, zur Unterrichtsmethode und zum Rechnereinsatz zu erheben. Dabei spielen auch die Auffassungen der Schülerinnen und Schüler zu den weiteren besonderen Merkmale der Unterrichtskonzeption wie Heftführung, persönlicher Arbeistaufwand, Einbeziehen der Darstellungsarten eine wichtige Rolle. Insgesamt wurden folgende Einzelaspekte als strukturgebende Leitgedanken festgelegt, um diese besonderen Items der Schülerfragebögen auszuwerten:

- Einschätzung des selbstständigen Lernens
- Gefühl der fachlichen Sicherheit
- Einschätzung der Heftführung
- Einschätzung zum Rechnereinsatz
- Einschätzung zum allgemeinen Arbeitsaufwand
- Einschätzung zum Einbeziehen verschiedener Darstellungsarten
- Wunsch nach verstärktem Üben

Die ersten beiden Aspekte dieser Liste werden in ähnlicher Weise als Unterrichtsmerkmale von Weinert/Helmke (1997) im Rahmen der Scholastik-Studie zu Grunde gelegt. Weinert und Helmke hatten auf Grundlage des Forschungsstandes die folgenden Merkmale festgelegt, von denen sie vermuteten, dass sie den Unterricht positiv beeinflussen: Klassenführung, Strukturiertheit, Unterstützung, Förderungsorientierung, soziales Klima, Vielfalt der Unterrichtsformen. Im Rahmen der Studie wurden von 51 Grundschulklassen die sechs Klassen ermittelt, die nach zwei Jahren den größten Leistungsfortschritt zeigten. Diese sechs Klassen wurden dahingehend untersucht, inwieweit die genannten Merkmale ausgeprägt waren. Es zeigte sich, dass zum Beispiel in Bezug auf die Vielfalt der Unterrichtsformen in fünf dieser sechs Klassen eine positive Ausprägung zu verzeichnen war.

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Auswertung des Schülerfragebogens an Hand der sieben aufgeführten Aspekte näher betrachtet und analysiert. Dabei werden exemplarisch einzelne Items betrachtet, die bei Betrachtung der Antworten besonders ins Gewicht gefallen sind.

Item	Frage
27	Mir ist es zu anstrengend, so lange in einer Gruppe zu arbeiten.
24	Ich hätte lieber alleine als in einer Gruppe gearbeitet.
30	Mir ist Unterricht lieber, bei dem die Lehrperson alles erklärt und vorrechnet.
28	Es ist gut, sich selbst bzw. mit anderen was beizubringen - dadurch behält man die Sachen besser.
25	Die Arbeit an der Lernwerkstatt war langatmig.
40	Ich fand es gut, dass wir für die Zeit der Lernwerkstatt unsere Arbeit selbst organisieren mussten.
17	Es war gut, sich die Begriffe (z.B. Extrempunkt) selbst zu erarbeiten. Dadurch habe ich mich viel intensiver damit auseinander gesetzt.

Tabelle 10.3: Items zur Einschätzung des selbstständigen Lernens

Einschätzung des selbstständigen Lernens

Für die Erörterung dieses Bereiches wurden die Items in Tabelle 10.3 einbezogen.

In Abbildung 10.2 sind die Ergebnisse der Beantwortung dieser Items zusammengefasst. Die Schülerinnen und Schüler bewerten die vorgegebenen Statements auf einer 7er Skala von -3 für „stimme ich gar nicht zu“ bis +3 für „stimme ich voll zu“, was hier jeweils durch die einzelnen Teile des Streifens angegeben ist. Item 27 und 24 waren bezüglich der (in Abbildung 10.2 Jeder Streifen bezieht sich dabei auf eines der Items aus Tabelle 10.3. Im Gegensatz zu den Items 30, 28, 25 40 und 17 enthalten die Items 27 und 24 (dazu gehören die beiden linken Streifen) eine eher negative Formulierung bezüglich der Einschätzung der Sozialform. Von daher ist verständlich, dass die Antworten der Schülerinnen und Schüler gegenläufig zu den Antworten bei den anderen Items sind.

Betrachtet man diese Übersicht genauer, so ergeben sich einige beachtliche Details, die teilweise auch zunächst widersprüchlich wirken.

Insgesamt gibt es eindeutige Indizien dafür, dass Gruppenarbeit positiv bewertet wird:

- Zu 57% lehnen die Schülerinnen und Schüler das erste Statement (Item 27) ab. Es ist ihnen also nicht zu anstrengend, über einen längeren Zeitraum in einer Gruppe zu arbeiten.
- Passend dazu wird auch das zweite Statement (Item 24: „Ich hätte lieber alleine als in einer Gruppe gearbeitet“) von 66% verneint, wobei

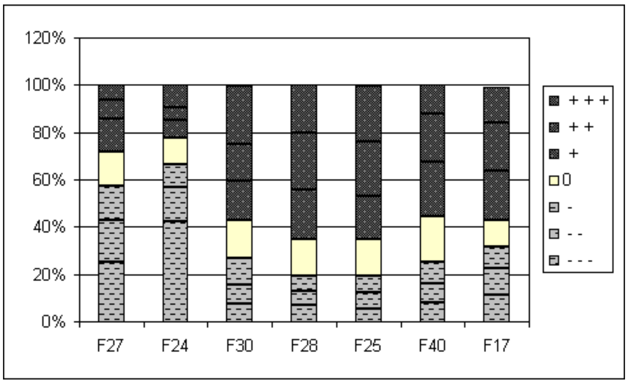


Abbildung 10.2: Einschätzung zum selbstständigen Lernen

sogar 42% dies mit dem extremen „stimme ich gar nicht zu“ tun.

- 65% stimmen zu, dass es gut ist, sich selbst etwas beizubringen (Item 28).
- 56% schätzen die Selbstorganisation (Item 40).

Ein übersichtlicheres Bild, wie Schülerinnen und Schüler zum Beispiel die Gruppenarbeit einschätzen, erhält man, wenn man die Fragen, die sich gezielt darauf beziehen (24, 27 und 40) wegen der inhaltlichen Nähe und der großen Ähnlichkeit der Ergebnisse zu einer neuen Variablen „Einschätzung der Gruppenarbeit“ zusammen zu fassen. Dazu werden die Fragen 24 und 27 umkodiert und dann der Mittelwert zwischen diesen beiden umkodierten Items und Frage 40 gebildet.

Inhaltliche Indizien für eine positive Wertschätzung eines selbstständigen Lernens sind also das Präferieren von Selbstorganisation der Arbeit und das selbstständige Erarbeiten mit dem potentiellen Erfolg der Nachhaltigkeit. Dabei wird das Arbeiten in Gemeinschaft der „einsamen Variante“ deutlich vorgezogen. Bei dieser Wertschätzung der Gruppenarbeit verwundert es zunächst, dass dennoch 56% angeben, dass es ihnen lieber ist, wenn die Lehrperson im Untericht alles vorrechnet und erklärt. Wie ist dieser vermeintliche Widerspruch zu klären? Hilfreich können hierbei die Antworten zu Item 25 sein, bei dem 65% der Lernwerkstatt Langatmigkeit bescheinigt haben. Ein Schüler hat dies in einer freien Formulierung so ausgedrückt:

> *Die Lernwerkstatt war eine gute, neue Erfahrung, die eigentlich jeder einmal machen sollte. Allerdings finde ich „normalen“ Unterricht besser und interessanter.*

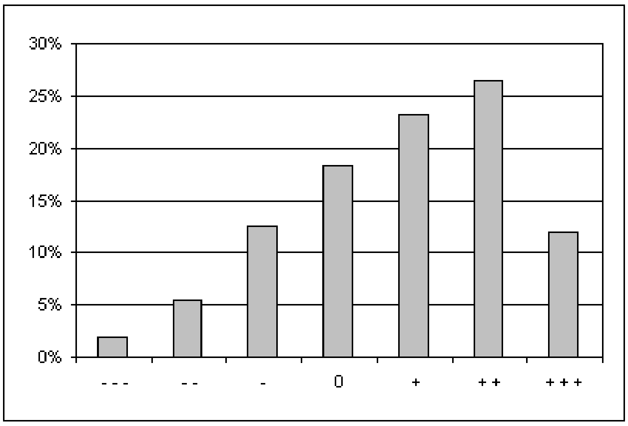


Abbildung 10.3: Einschätzung der Gruppenarbeit

Der lange Atem, der nötig ist, sich in einer Kleingruppenarbeit stets selbst zu motivieren und bei der Arbeit zu bleiben, auch gegen Ablenkungstendenzen von Mitschülerinnen und -schülern, löst verständlicherweise nicht nur positive sondern auch negative Reaktionen aus. In einer solchen Phase können die klärenden und inhaltlich weitertragenden Impulse der Lehrperson vermisst werden, da eine stringente Impulssetzung der Lehrperson auch für Effizienz, Weiterkommen und inhaltliche Abwechslung sorgen können. Fehlen eigene Impulse in der Gruppe – vielleicht auch weil dies eine unter Umständen neue ungewohnte Handlung darstellt, wird dieses Ausbleiben der Lehrerimpulse als Mangel erlebt und wird eine längere Gruppenarbeitsphase als langatmig und ineffizient wahrgenommen.

Und natürlich kann der Unterschied zwischen Theorie und Praxis den Widerspruch erklären helfen. Auch wenn prinzipiell einer Gruppenarbeit Positives abgewonnen und sie als sinnvoll angesehen wird, so kann die spezifische Thematik und die konkrete Ausgestaltung des selbstständigen Lernens zu wünschen übrig lassen. Dafür sind vielfältige Gründe denkbar, zum Beispiel: Mängel im Material, Unbefriedigendes bei der Arbeit in der konkreten Gruppe, Kritik an der jeweiligen Lehrperson. Ein Licht auf diese Vielfalt erlauben die Auswertungen der freien Anmerkungen, auf die weiter unten noch eingegangen wird. Ein Aspekt sei jedoch hier bereits genannt: Mehrere Schülerinnen und Schüler haben formuliert, dass sie ein früheres Aufbrechen der Sozialform gewünscht hätten, um die Ergebnisse zu vergleichen und eine Bestätigung ihrer Arbeit zu erhalten. Dies ist sicher ein wichtiger Hinweis, die Widersprüchlichkeit zwischen Langatmigkeit und Wertschätzung zu erklären.

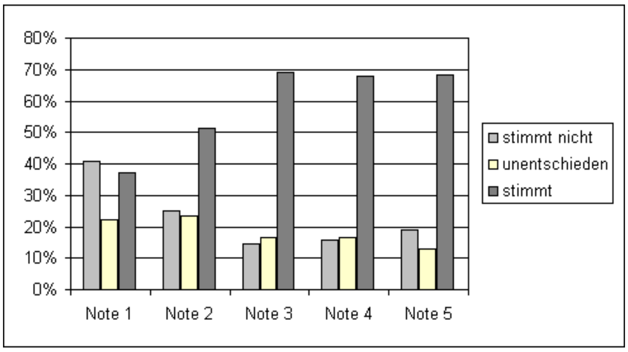


Abbildung 10.4: Einschätzung der Gruppenarbeit in Abhängigkeit zur letzten Zeugnisnote

Es ist interessant, die neu gebildete Variable „Einschätzung der Gruppenarbeit“ getrennt nach verschiedenen Schülergruppen zu betrachten.

So ist zum Beispiel der Anteil der Mädchen mit einer positiven Einschätzung der Gruppenarbeit etwas höher als bei den Jungen. Es sind 65% der Mädchen gegenüber 58% der Jungen, die der Gruppenarbeit Positives abgewinnen. Dies entspricht Befunden von Jahnke/Klein (2001) und Niederdrenk-Felgner (1994), die ebenfalls betonen, dass Mädchen ein schülerzentriertes Arbeiten in Kleingruppen stärker als Jungen bevorzugen. Eine Kleingruppe gewährt einen geschützten Rahmen, Gedanken frei zu formulieren und sich dabei nicht gegenüber dominanteren Mitlernenden behaupten und durchsetzen zu müssen – ein Vorzug, der – zumindest in der Vergangenheit – als ein Vorteil für Mädchen angesehen wurde. Das Ergebnis hier mag diese These bei aller Vorsicht stützen.

Betrachtet man die Einschätzung zu dieser Sozialform in Abhängigkeit zur Mathematikzensur auf dem letzten Zeugnis, überrascht zunächst die hohe Befürwortung der Sozialform bei den Lernenden mit eher schwächeren Noten.

Es verwundert nicht, dass die Beurteilung der Sozialform bei Schülerinnen und Schülern mit besseren Mathematiknoten sehr ausgewogen ist. Solche Schülerinnen und Schüler sind offenbar im bisherigen Unterricht erfolgreich und werden von daher eine Veränderung der Unterrichtsform eher kritisch sehen. Deshalb ist eher bemerkenswert, dass dennoch ein Drittel dieser Schülerinnen und Schüler die ungewohnte neue Sozialform positiv einschätzen. Hier sollte man sicher verschiedene Schülertypen unterscheiden, die bezogen auf die Zeugnisnote erfolgreich sind. Tendentiell sollen die beiden folgenden Typisierungen erfolgreicher Schülerinnen und Schüler das Spektrum beschreiben: Da gibt es einerseits den Typus des erfolgreichen Lerners, der aber den Weg des Minimalaufwands geht und keine weitere intrinsische Motivation hat, sich intensiver mit der Materie zu beschäftigen. Demgegenüber steht der/die Lernende, an der Sache interessiert und ob der Genialität „nebenbei“ schulisch erfolgreich. Diese beiden konträren Typen werden eine Gruppenarbeit, die den prinzipiellen Rahmen schafft für eine tiefergehende Beschäftigung mit der Sache, ganz unterschiedlich beurteilen, da zum einen die weitere Arbeit eine freiwillige Leistung darstellt und weil der Erfolg von neuen Parametern abhängt, die unter Umständen schwerer zu kalkulieren sind.

Bemerkenswert an Abbildung 10.4 ist, dass gerade schwächere Schülerinnen und Schüler zu einem hohen Prozentanteil der Gruppenarbeit Positives abgewinnen. Dies scheint zunächst der in der Schulpraxis oft anzutreffenden Überzeugung zu widersprechen, wonach für schwächere Lerner der Königsweg des Lernens in einer kleinschrittigen, instruktiven Vermittlung besteht und das selbstständige Arbeiten in einer Kleingruppe als zu schwierig angesehen wird. Diese Überzeugung findet man sowohl bei Lehrenden wie bei Lernenden. Dabei wird oft der Schwierigkeitsgrad eindimensional als einziges relevantes Kriterium gesehen. Der alleinige Blick auf den Schwierigkeitsgrad von Aufgaben greift allerdings zu kurz – sowohl zur Beurteilung der Sozialform und erst recht zur Klassifizierung der Schülerinnen und Schüler. Das Ergebnis, das in Abbildung 10.4 dargestellt ist, zwingt zu einer differenzierteren Wahrnehmung und der Suche nach Aspekten, warum gerade Schülerinnen und Schülern mit schlechten Mathematiknoten auf dem letzten Zeugnis einen solchen Weg befürworten. Aufschluss über mögliche Gründe, warum die Gruppenarbeit insbesondere von Schülerinnen und Schülern mit schwächeren Noten positiv eingeschätzt wird, geben die Untersuchungen einzelner spezieller Items. So wird zum Beispiel das Statement (F15) „Mir hat es geholfen, dass wir in unserer Sprache über Mathematik reden konnten, ohne direkt verbessert zu werden.“ von Schülerinnen und Schülern mit eher schwachen Mathematiknoten auf dem letzten Zeugnis in viel höherem Maße befürwortet als von anderen (vgl. Abbildung 10.5). Dabei wächst sogar der Anteil derjenigen, die diesem Statement zustimmen, mit der schlechter werdenden Zeugnisnote.

Das informelle Reden in der eigenen Sprache ist ein wesentliches Merkmal in einer selbstständigen Lernumgebung. Dies wird auch konkret von Schülerinnen und Schülern bei den freien Anmerkungen formuliert, die im letzten Item des Fragebogens möglich waren. (siehe nächstes Kapitel).

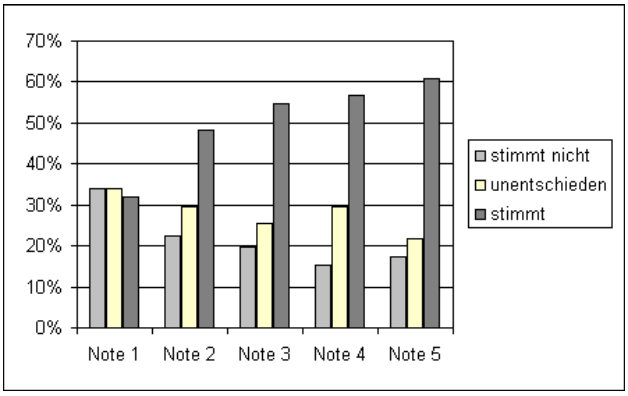


Abbildung 10.5: „Mir hat es geholfen, dass wir in unserer Sprache über Mathematik reden konnten.“

Gefühl der fachlichen Sicherheit

Der Aspekt „Fachliche Sicherheit“ bezieht sich lediglich auf die eigene Einschätzung der Schülerinnen und Schüler bzgl. ihrer fachlichen Sicherheit, es geht hier nicht um ein tatsächliches Leistungsvermögen. Da das Ausfüllen des Schülerfragebogens und das Absolvieren des Abschlusstests unabhängig voneinander und anonym erfolgten, können keine Bezüge zwischen den im Abschlusstest tatsächlich erbrachten Leistungen und dem eigenen Einschätzen der fachlichen Sicherheit vorgenommen werden.

Das Gefühl der fachlichen Sicherheit spiegelt sich in den folgenden Items wieder:

Item	Frage
9	Ich kenne jetzt die besonderen Punkte eines Funktionsgraphen und kann diese bestimmen.
10	Bzgl. der Inhalte der Lernwerkstatt fühle ich mich immer noch sehr unsicher.
11	Ich habe bei der Lernwerkstatt die Inhalte noch nicht verstanden und hoffe, dass die Lehrperson alles noch einmal erklärt.
1	Mit Mathematik beschäftige ich mich .... (Skala von *sehr ungern* bis *sehr gern*).
16	Es war viel zu schwer, sich selbst Definitionen auszudenken (z.B.: Was ist ein Extrempunkt?).

Tabelle 10.4: Die Items zum Gefühl der fachlichen Sicherheit

Das Gefühl der fachlichen Sicherheit ist nicht nur ein diffuses Empfinden, sondern lässt sich an deutlichen Parametern festmachen: Nur wenn man sich

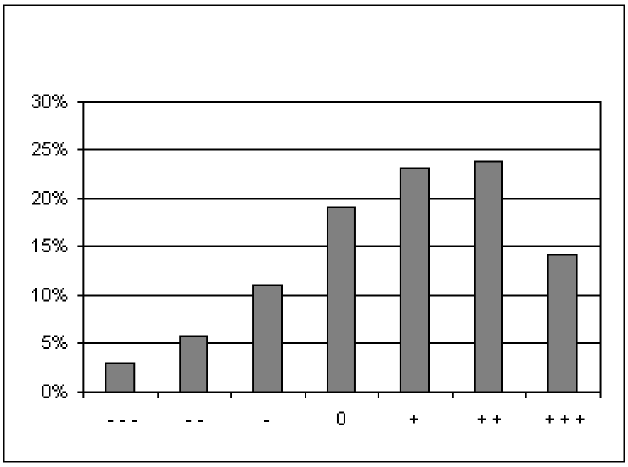


Abbildung 10.6: Einschätzung der eigenen fachlichen Sicherheit

fachlich sicher fühlt, ist eine anspruchsvolle mathematische Tätigkeit wie das Definieren zwar schwer, aber nicht zu schwer. Damit ist nicht gesagt, dass man sich fachlich sicher fühlen kann, obwohl man das selbstständige Definieren als zu schwer ansieht, denn schließlich verlangt das Aufstellen einer Definition eine Fülle mathematischer Kompetenzen. Unbestritten ist aber, dass eine solche Tätigkeit sehr wohl ein Gradmesser sein kann für das Einschätzen des eigenen Könnens. Diejenigen, die das positive Erlebnis kennen, „etwas auf den Punkt gebracht haben“, mögen dies intuitiv nachvollziehen können. Die Freude an der Beschäftigung mit Mathematik ist dabei nicht nur Folge eines erfolgreichen Mathematiktreibens, sondern genauso gut auch eine wichtige motivierende Grundlage. Bleibt das Gefühl der fachlichen Sicherheit jedoch aus und wird dies entweder als Lücke oder Unbehagen erlebt, so wird der Einzelne bestrebt sein, dies zu beheben – und dabei kann der Wunsch nach einer absichernden Erklärung durch die Lehrperson ein willkommener Weg sein.

Schon von der inhaltlichen Prägung ist zu erwarten, dass insbesondere die Items 9 und 10 in engem Zusammenhang zueinander stehen, denn hier geht es wirklich um die Sicherheit bzgl. der spezifischen Inhalte der Lernwerkstatt. Trotz der verschiedenen Nuancen der drei Fragen zu 9, 10 und 11 zeigen sie sehr ähnliche inhaltliche Beurteilungen, weshalb diese drei Items zusammengefasst werden, um damit einen Überblick und eine Grundlage für die Untersuchungen weiterer Abhängigkeiten zu erhalten. Dazu werden die Items 10 und 11 zunächst umkodiert und dann der Mittelwert zwischen den dreien gebildet. Abbildung 10.6 gibt einen Überblick über das Ergebnis.

Auch wenn eine Mehrheit sich im Fachlichen eher sicher fühlt, sollte dies nicht darüber hinwegtäuschen, dass immerhin fast 20% der Schülerinnen und Schüler dies nicht tun. Um diese Zahl wirklich als Einschätzung des Lernarrangements zu nutzen, müsste jedoch eine entsprechende Vergleichszahl in Bezug auf traditionellen Unterricht vorliegen, was aber im Rahmen dieser Studie nicht erhoben wird.

Gerade hinsichtlich des Gefühls der fachlichen Sicherheit wäre eine weitere detaillierte Auswertung hinsichtlich des Selbstbildes bzgl. Mathematik von Schülerinnen und Schüler interessant, trifft jedoch nicht den Fokus dieser Studie, weshalb es hier lediglich bei einer groben Wiedergabe der Ergebnisse bleibt.

Einschätzung der Heftführung

Das Schätzen der Heftführung zeigt sich in den Antworten zu den folgenden drei Items:

Item	Frage
45	Die Heftführung war aufwändiger als sonst, da man viel mehr eigenständig formulieren musste.
46	Die Heftführung war sinvoller als sonst, da man viel mehr eigenständig formulieren musste.
44	Ich habe mein Heft ausführlicher geführt als sonst.

Tabelle 10.5: Die Items zur Einschätzung der Heftführung

Bei diesen drei Items geht es einerseits um die Beurteilung des Arbeitsaufwandes der Heftführung bei dieser Lernwerkstatt (Items 45, 46) und andererseits um die Einschätzung des tatsächlich erbrachten Aufwands (Item 44). Bezüglich der Einschätzungen der Schülerinnen und Schüler zu den drei Items ergibt sich folgendes Bild:

Im Rahmen der Lehrerbegleitmaterialien wurden die Lehrpersonen aufgefordert, von den Schülerinnen und Schüler eine Heftführung im Sinne eines Lerntagebuchs einzufordern. Dazu war eine Anleitung als Kopiervorlage gegeben (vgl. Anlage A) worden, die den Lernenden als Hilfestellung dienen sollte, ihr Heft im Sinne eines Lerntagebuchs zu führen. Diese Konzeption war angelehnt an die Ideen, wie sie Ruf/Gallin (1998) im Rahmen des dialogischen Lernens geprägt haben und wie Hußmann (2003) sie im Rahmen seiner Intentionalen Probleme als wichtiges Instrumentarium nutzt. Die Schülerinnen und Schüler wurden aufgefordert, nicht nur Ergebnisse, Definitionen und Merksätze ins Heft aufzunehmen, sondern vielmehr ihren Lernprozess zu dokumentieren. So sollten spontane Ideen, überzeugende Beispiele und einsichtige Erklärungen ebenso aufgenommen werden wie Irrwege,

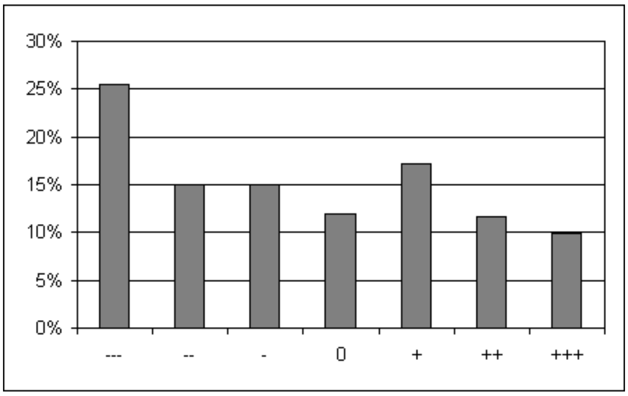


Abbildung 10.7: Item 44 „Ich habe mein Heft ausführlicher geführt als sonst.“

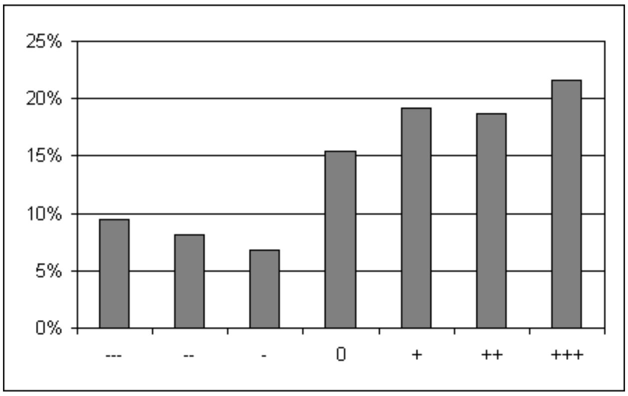


Abbildung 10.8: Item 45 „Die Heftführung war aufwändiger als sonst, da man viel mehr eigenständig formulieren musste.“

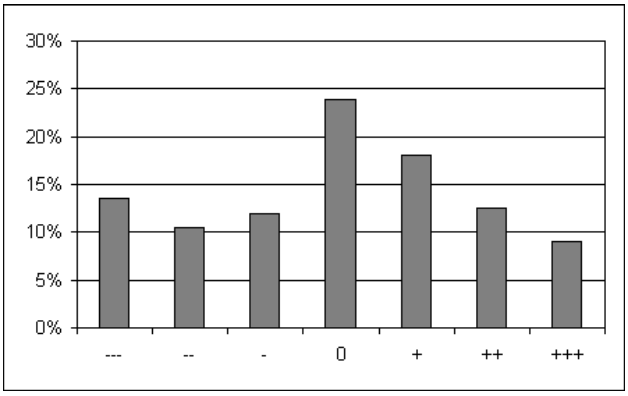


Abbildung 10.9: Item 46 „Die Heftführung war sinnvoller als sonst, da man viel mehr eigenständig formulieren musste.“

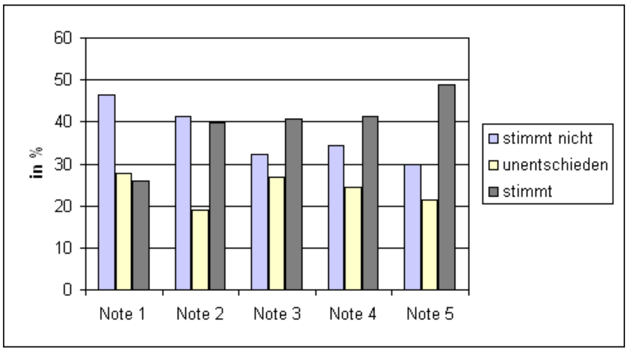


Abbildung 10.10: Item 46: „Die Heftführung war sinnvoller als sonst, da man viel mehr eigenständig formulieren musste.“

Schwierigkeiten und Fehler. Immerhin 39% der Schülerinnen und Schüler geben an, dass sie ihr Heft ausführlicher geführt haben als sonst, wobei davon auszugehen ist, dass sich die Ausführlichkeit der Heftführung auf die Anregungen im Sinne eines Lerntagebuchs beziehen. Erstaunlich ist auch, dass immerhin 39% angeben, dass sie die Heftführung als sinnvoller ansehen. Dieser Anteil erhöht sich auf 69%, wenn man nur diejenigen Schülerinnen und Schüler einbezieht, die das Heft tatsächlich ausführlicher geführt haben als sonst (nach ihren eigenen Angaben bei Item 44). Damit bestätigen die Lernenden selbst die eingangs formulierte Hypothese, wie wichtig das Reflektieren des eigenen Lernprozesses und Aufschreiben der wichtigsten Gedanken und Aspekte sind.

Betrachtet man die Frage nach der Sinnhaftigkeit dieser Heftführung in Abhängigkeit zur letzten Zeugnisnote, erhält man folgendes Bild:

Es bezeichnen 41% der Schülerinnen und Schüler, die auf dem letzten Zeugnis eine „5“ hatten, die Heftführung als sinnvoller, da man mehr eigenständig formulieren muss. Dies ist eine erstaunlich hohe Zahl und betont einmal mehr die bereits oben beschriebene Bedeutung des eigenen Formulierens und Verbalisierens – hier jedoch bezogen auf die schriftliche Variante, oben war es das informelle Reden.

Einschätzung zum Rechnereinsatz

Konzeptionell gehört zu der hier untersuchten Lernwerkstatt, dass den Schülerinnen und Schüler ein Computeralgebrasystem zur Verfügung steht. Dieses ist – je nach den Bedingungen an der Schule – entweder auf einem Computer oder einem Taschenrechner verfügbar. Die Einschätzungen zum Rechnereinsatz werden dementsprechend ebenfalls im Fragebogen erhoben.

Die Items 36 bis 38 sind hier die zentralen Items, um die Einschätzung zum rechnereinsatz zu erfassen.

Item	Frage
36	Ohne den Rechnereinsatz wäre die Lernwerkstatt nicht sinvoll.
37	In unserer Gruppe haben wir sehr häufig den Rechner benutzt.
38	Der Einsatz des Rechners war überflüssig.

Tabelle 10.6: Die Items zum Rechnereinsatz

Die Antworten zu den drei Items zeigen alle ein ähnliches Bild (s. Tabelle 10.7), weshalb sie zu einem zusammengefasst werden. Bei Item 38 ist zu beachten, dass im Vergleich zu den Items 36 und 37 ein gegenläufiges Statement zu bewerten war.

	-	0	+
36	19,5%	14,8%	65,8%
37	17,6%	9,9%	72,4%
38	82%	7,3%	10,6%

Tabelle 10.7: Einschätzungen zum Rechnereinsatz

Folgende interessante Aspekte ergeben sich bei der Untersuchung dieser neuen Variablen zum Rechnereinsatz in Abhängigkeit zu anderen Items: Die positive Einschätzung ist abhängig von der Art des benutzten Rechners. Als Basis der Untersuchung wurden die Einschätzungen zum Rechnereinsatz in Beziehung gesetzt zu den Antworten zu Item 35 (vgl. Tabelle 10.8). Aus diesen Antworten wurden zwei Kategorien gebildet – Handhelds (im Folgenden HH; dazu wurden die Antworten A und E gezählt) sowie PC (Antworten B,C,D oder F).

Item 35: „Welchen Rechner haben Sie eingesetzt? (Mehrfachnennung möglich!)“		
A	[ ]	TI-92 bzw. V-200
B	[ ]	Derive
C	[ ]	MuPad
D	[ ]	Maple
E	[ ]	andere Taschenrechner/ -computer
F	[ ]	andere PC-Software

Tabelle 10.8: Art des Rechners

Der Anteil derjenigen, die den Rechnereinsatz positiv sehen, ist bei den Schülerinnen und Schülern, die Handhelds benutzen höher als bei denen, die am PC arbeiten. Aufgrund der beobachteten Stunden in unterschiedlichen Kursen und speziellen Nachfragen gab es drei verschiedene Modelle für den Rechnereinsatz, die sich durch späteres Nachfragen und Beobachtungen verschiedener Kurse heraus kristallisiert haben:

- PC-Raum (meist mit großen Bildschirmen auf den Tischen)
- Ein Laptop pro Tischgruppe
- Ein Handheld pro Schüler/Schülerin

Alleine in dieser organisatorischen Festlegung liegt ein möglicher wichtiger Grund dafür, dass Schülerinnen und Schüler, die ein Handheld benutzen, den Rechnereinsatz positiver sehen als solche, die am PC arbeiten. Zwei Aspekte können hier eine Rolle spielen:

- Die äußere Dominanz eines Handhelds ist weitaus geringer als die eines PCs – sei es als Notebook und erst recht als fest installierter Computer. Ein Handheld ist zum Beispiel im Rahmen einer Tischgruppe leichter in ein Gespräch zu integrieren (vgl. Zeile 646 auf Seite 322). Ein solches Gerät stört auch nicht, wenn es gerade nicht gebraucht wird. Dies ist bei „großen" Geräten anders, die per se viel Platz auf dem Tisch einnehmen und unter Umständen sogar Sichtkontakt erschweren. Besonders bei traditionell eingerichteten PC-Räumen mit großen Bildschirmen in „Reihenformation" ist oft nur ein Gespräch zwischen zwei Personen möglich.
- Ein Gerät, was sowohl in der Schule wie auch zu Hause in gleicher Einstellung verwendet wird und ständig individuell verfügbar ist, wird mit der Zeit vertrauter. Auch wenn viele Schülerinnen und Schüler mittlerweile PCs zu Hause haben, ist deren uneingeschränkte Nutzung durch technische Mängel oder organisatorische Absprachen zu Hause nicht notwendig gesichert. Die Dauer der Verfügbarkeit des Mediums wird auch in der Meta-Studie von Burrill (2002) als ein wichtiger positiver Einflussfaktor betont:

  > *Students who spent more time using handheld graphing technology showed greater gains than students who had access to the technology for brief interventions or short periods of time.* ([Burrill 2002], S.i)

  Auch Trouche (2005) stellt den Faktor der Verfügbarkeit heraus und bezieht sich auf die Ergebnisse einer Studie von Chacon/Soto-Johnson (1998):

> *Chacon/Soto-Johnson point out that results are not the same when students work in computer rooms with their teacher: in this context, the authors report irritation in the face of certain tool blockages, frustration arising from the only occasional utilization of the tool. These phenomena appear rather marginally in calculator environments (i.e. when calculators are tools recognized by teachers and continuously at students' disposal);..* ([Trouche 2005], S. 18)

Als Folge der Feststellung, dass die Art des benutzen Rechners sich auf die Einschätzung des Rechnereinsatzes auswirkt, wurde untersucht, ob die Angaben zu Item 34 („Wobei hat der Rechner geholfen?") von denjenigen, die am PC gearbeitet haben, anders beantwortet wurden als von denen, die Handhelds benutzt haben. Dieser Vergleich zeigte jedoch nur geringfügige Unterschiede. Tabelle 10.9 gibt einen Überblick, wie häufig in den einzelnen Gruppen die vier vorgegebenen Arten von Funktionen des Rechnereinsatzes angekreuzt wurden.

	kontrollieren	Graphen erzeugen	berechnen	ausprobieren
HH	67%	84%	58%	75%
PC	67%	79%	54%	78%

Tabelle 10.9: Rechnereinsatz in Abhängigkeit, ob HH oder PC benutzt wurde

Es zeigt sich, dass die Einschätzung zum Rechnereinsatz unabhängig von der letzten Zeugnisnote immer ähnlich bewertet wird – hier ist keine eindeutige Präferenz bei einzelnen Zeugnisgruppierungen festzustellen. Allerdings fällt die Einschätzung bei Jungen und Mädchen deutlich unterschiedlich aus: 82% der Jungen sehen den Rechnereinsatz als positiv an und demgegenüber 69% bei den Mädchen. Dies ist ein Ergebnis, dass Studien aus der Genderforschung im Rahmen des Mathematikunterrichts bestätigen. ([Jungwirth 1992], [Jungwirth 1994], [Niederdrenk-Felgner 1993])

Einschätzung zum allgemeinen Arbeitsaufwand

Die Ergebnisse zu diesen Statements sind in Abbildung 10.11 zusammengestellt.

Die Lernwerkstatt erfordert von Schülerinnen und Schülern mehr Einsatz und Arbeitsaufwand als normaler Unterricht. Dies verwundert nicht, gilt es doch, den Lernprozess selbst in die Hand zu nehmen. Trotz der inhaltlichen Vorgaben sind noch viele Parameter frei wählbar, die es zu gestalten gilt. So

Item	Frage
42	Ich habe in der Zeit der Lernwerkstatt im Unterricht deutlich weniger getan als sonst.
26	Bei dieser Lernform beschäftige ich mich viel weniger mit Mathematik als sonst.
23	Bei der Lernwerkstatt muss man mehr arbeiten als im normalen Unterricht.
32	Wir hatten insgesamt zu wenig Zeit.
41	Ich habe in der Zeit der Lernwerkstatt zu Hause deutlich weniger getan als sonst.

Tabelle 10.10: Die Items zum allgemeinen Arbeitsaufwand

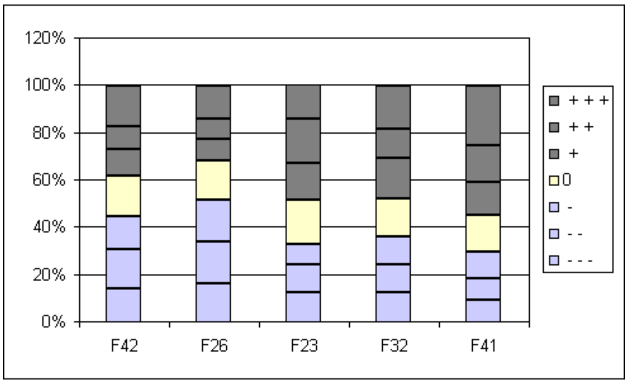


Abbildung 10.11: Einschätzungen des allgemeinen Arbeitsaufwands

müssen zum Beispiel im Vergleich zum traditionellen Unterricht bestimmte Absprachen selbstständig getroffen werden: was in welcher Reihenfolge erarbeitet wird, welche Hausaufgaben verabredet werden, wie die Arbeit eventuell aufgeteilt wird.

Zudem sind inhaltlich in besonderer Weise Strategien zu entwickeln, wenn man nicht weiter kommt und Schwierigkeiten auftreten. Der Ruf nach der Lehrperson wird nicht so leicht zum Erfolg führen, da die Lehrperson für verschiedene Gruppen, die unter Umständen an verschiedenen Problemen arbeiten, offen sein muss und dies nicht in so kurzer Zeit bewältigen kann wie bei zeitlich eng begrenzten, einheitlichen Aufgabenstellungen innerhalb einer Unterrichtsstunde. Zum anderen ist es auf die Dauer bei einer längeren selbstständigen Arbeitsphase unbefriedigend und entmutigend, wenn man immer sofort nach Hilfe ruft. Deshalb wählen die Lernenden andere Strategien, um der Lösung eines Problems näher zu kommen – entweder durch vermehrt gegenseitiges Erklären, gezielte Recherche in Schulbüchern oder anderen Quellen. All dies erhöht den Arbeitsaufwand tatsächlich oder auch nur subjektiv aufgrund der ungewohnten Arbeitsform. Einfluss auf die Einschätzung der zu bewältigenden Arbeit hat sicherlich auch, dass bei dieser ungewohnt langen Gruppenarbeitsphase die zu bewältigende Stoffmenge am Anfang als Anforderung bekannt ist. Dies ist ungewohnt und kann leicht als belastend empfunden werden.

Einschätzung zum Einbeziehen verschiedener Darstellungsarten

Item	Frage
12	Ich fand es nervig, dass so oft verschiedene Darstellungen einer Funktion (Term, Tabelle, Graph) einbezogen wurden.
13	Mir hat es geholfen, dass Funktionen in verschiedenen Darstellungsarten (mal als Term, als Tabelle und/oder als Graph) einbezogen wurden.

Tabelle 10.11: Die Items zum Einbeziehen der Darstellungsarten

Auch hier verwundert nicht, dass die beiden Items 12 und 13 ein sehr ähnliches Bild ergeben und von daher zusammengeführt werden können.

Die Einstellungen der Schülerinnen und Schüler zu den mathematischen Darstellungsarten sind in den Abbildungen 10.12 und 10.13 dargestellt.

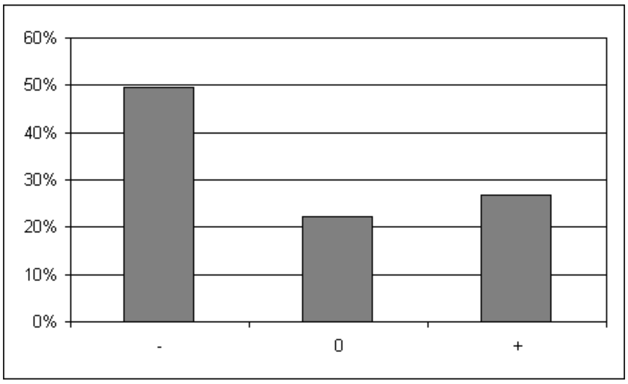


Abbildung 10.12: „Ich fand es nervig, dass so oft verschiedene Darstellungen einer Funktion einbezogen wurden.“

Bereits in der Konzeption der Lernwerkstatt (vgl. Kapitel 5.3) war es ein wichtiges Kriterium, dass auch Aufgaben einbezogen werden, die die verschiedenen mathematischen Repräsentationsformen nicht nur aufgreifen, sondern einen flexiblen Umgang und Wechsel zwischen den Darstellungsarten fordern und einüben. Dazu gehört zum Beispiel die Aufgabe, zu drei Funktionen

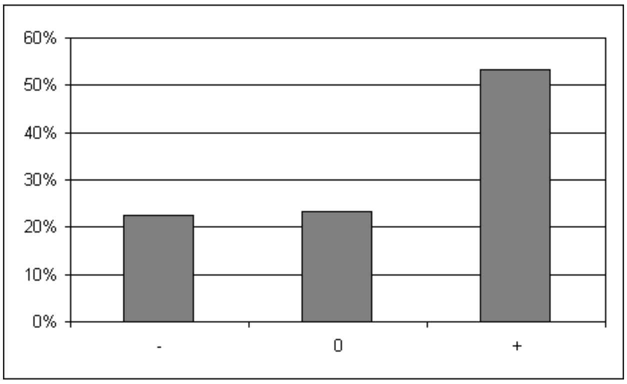


Abbildung 10.13: „Mir hat es geholfen, dass Funktionen in verschiedenen Darstellungsarten einbezogen wurden.“

die Extrempunkte zu bestimmen, wobei eine der Funktionen nur als Tabelle, die andere nur als Term und die dritte nur als Graph gegeben ist (vgl. Baustein E, Seite 3). Davon ausgehend soll verglichen werden, welche Vor- und Nachteile diese drei verschiedenen Darstellungsarten in sich bergen. Ähnliche Reflexionen sind auch im Kontext anderer Aufgaben gefragt (z.B. bei Nullstellenbestimmung). Durch das bewusste Einbeziehen der unterschiedlichen mathematischen Darstellungsarten sollten auch verschiedene Präferenzen von Schülerinnen und Schüler Berücksichtigung finden, um so verschiedene Wege, Funktionen zu erfassen, nahe zu bringen und zu vermitteln. In der Einschätzung der Lernenden wird dies als positiv und hilfreich eingestuft. Dies entspricht Erfahrungen aus dem Bereich der Grundschule und Sekundarstufe I, wie Stern (1997) sie beschreibt:

> *Das Verstehen mathematischer Konzepte und Gesetze zeigt sich in der Fähigkeit zur Flexibilität der Darstellungsweise. Eine Förderung mathematischen Verständnisses kann durch die Explikation unterschiedlicher Repräsentationsformen erfolgen.*

Auch dem „Networking-Ansatz“ von Steiner (1991) für den Algebra-Unterricht liegt die Unterstützung multipler Repräsentationen mathematischen Wissens zugrunde, wobei Steiner die Beziehung zwischen Variablen als Formel, Graph und Situation darstellt.

Schülerinnen und Schüler nennen auch in ihren Hefteinträgen deutliche Präferenzen, zum Beispiel schreibt eine Schülerin im Rahmen der Dokumentation der Arbeit zu Baustein K:

> *Die Untersuchung einer Funktion auf möglichst viele Eigenschaften erfolgt für mich persönlich mit Vorgabe einer Wertetabelle am*

> *schnellsten und einfachsten, da die Werte und der Graph die Eigenschaften der Funktion gut veranschaulichen. Die Untersuchung mithilfe eines vorgegebenen Graphen ist ebenfalls praktisch, man hat aber keine genauen Werte für die Untersuchung. Die Methode der Untersuchung mit Vorgabe eines Terms ist eher anspruchsvoll, doch man erhält ausführliche und genaue Ergebnisse, falls keine Fehler in den Rechnungen aufgetreten sind. Insgesamt bevorzuge ich die Methode mit Vorgabe der Wertetabelle.*

Der Wechsel der mathematischen Darstellungsarten war auch ein wichtiger Aspekt im Rahmen einer französischen Langzeitstudie mit Lehrern, die zwischen 1994- 1996 gemacht wurde ([Lagrange 2005]). Es wurden 17 engagierte Lehrpersonen befragt. Vor dem Projekt ging es um ihre Erwartungen, die sie mit dem Einsatz von Computeralgebra verbinden und zwei Jahre später nach der Projektphase um ihre konkreten Erfahrungen. Dabei wurden auch die Haltungen der Schülerinnen und Schüler einbezogen. Die Lehrpersonen nannten als eine wichtige Erwartung, dass der Wechsel der Darstellungsarten für Schülerinnen und Schüler hilfreich sein kann. Diese Erwartung wurde nicht bestätigt. Diese Diskrepanz zwischen der anfänglichen Erwartung und der tatsächlichen Erfahrung war nicht die einzige, die in dieser Studie aufgedeckt wurde. Hier mag sicherlich ein Grund sein, dass die Vermittlung und die Aufgabenstellungen eher auf klassische Weise erfolgten und gerade die Reflexion der Bedeutung der Darstellungsarten nicht explizit durch konkrete Aufgabenstellungen angeregt wurde.

Wunsch nach verstärktem Üben

Im Rahmen der Antworten zu den Items mit Ratingskalen lässt sich ein weiterer interessanter Aspekt eruieren. Schülerinnen und Schüler haben explizite Übungsphasen vermisst, entweder zu Hause oder während der Unterrichtszeit. Solche Phasen sind notwendig, um bzgl. der Inhalte sicherer zu werden und auch Bestätigung für die eigene Leistung zu erlangen. Diese Rückmeldung sollte dazu dienen, das Material kritisch zu durchleuchten, ob nicht gerade der Bereich des Übens zu wenig Raum einnimmt und zu viel Fokus auf die eigenständige Erarbeitung neuer Inhalte gelegt worden ist und ist von daher ein wichtiges Kriterium er Weiterentwicklung.

Der Wunsch nach verstärktem Üben zeigt sich in den Antworten zu den folgenden Items.

In Abbildung 10.14 sind die Einstellungen der Schülerinnen und Schüler zu diesen beiden Items dargestellt.

Item	Frage
29	Im normalen Unterricht gibt es extra Übungsphasen- bei der Lernwerkstatt geht alles in einem: Stoff erarbeiten und üben.
43	Wir hätten mehr Hausaufgaben verabreden sollen, um mit der Zeit besser hin zu kommen.
15	Mir hat es geholfen, dass wir in unserer Sprache über Mathematik reden konnten, ohne direkt verbessert zu werden.

Tabelle 10.12: Die Items zum Wunsch nach verstärktem Üben

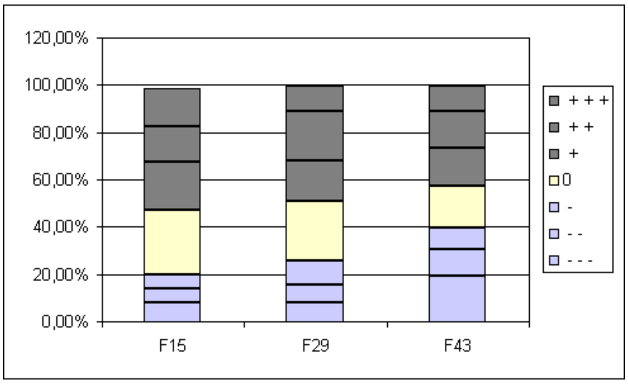


Abbildung 10.14: Einschätzungen zum Üben

10.3.2 Auswertung der freien Anmerkungen

Das letzte Item im Schülerfragebogen (Item 54, s. Anhang D) bot die Möglichkeit „Anmerkungen" frei zu verfassen. Dies nutzten 291 der 578 Schülerinnen und Schüler, die den Fragebogen beantwortet haben. Deren Antworten enthielten 455 Aspekte, die in verschiedenen Kategorien zusammengefasst wurden: kritische Ablehnung, positive Zustimmung und Verbesserungsvorschläge. Die Anmerkungen waren auf diese Kategorien ungefähr gleich verteilt. Viele Äußerungen waren mehreren der drei Kategorien zuzuordnen. Im Folgenden werden einige markante Aspekte der Auswertung beschrieben.

Im Fragebogen gab es zwar ein Item mit Ratingskala zum freien Reden, dennoch gab es Schülerinnen und Schüler, die ihre Wertschätzung des informellen Redens im Rahmen der Anmerkungen noch einmal explizit formuliert haben. Auffällig ist, dass diese alle eher schwächere Noten in Mathematik hatten. Die folgenden Zitate aus diesen Beiträgen stehen exemplarisch für die geäußerten Gedanken. Die Formulierungen entsprechen exakt denen der Schülerinnen und Schüler.

- *Ich finde die Idee einer Lernwerkstatt an sich gut, da das gegenseitige Erklären bestimmt besonders für Leute, die nicht so schnell in Mathe verstehen können, hilfreich ist.*
- *Alles in einem positiv überrascht. Man hatte die Möglichkeit Gruppenmitglieder zu fragen. Zum Teil wären diese Fragen im Unterricht bei einem Lehrer nicht möglich gewesen.*
- *Der Unterricht war für mich verständlicher, weil ich immer nachfragen konnte und dabei keine Bedenken hatte, dass man denkt ich hab gar keine Ahnung von Mathematik. Mein Unwissen wirkt sich nicht auf die mündliche Note aus.*

Natürlich bleibt die Frage, warum das „Immer nachfragen können“ bei „einem Lehrer nicht möglich ist“. Zunächst gibt es dafür äußere Gründe. Im üblichen Fragend-entwicklenden Frontalunterricht reicht die Zeit nicht, sämtliche Fragen und Unklarheiten unmittelbar klären zu können. Dies ist jedoch in der Kleingruppenarbeit prinzipiell möglich. Zudem ist es natürlich weitaus schwieriger, Unverstandenes vor einem ganzen Plenum statt informell in einer Tischgruppe zu formulieren. Aber es gibt auch innere Gründe, die in den Zitaten formuliert werden: Etwa die Angst, sich vor der Lehrperson unwissend zu zeigen und dadurch eine schlechtere Note zu riskieren, versagen das unmittelbare Nachfragen. Unwissenheit wird dabei eher als Makel und nicht als Chance erlebt, das eigene Denken durch das Arbeiten mit Fehlern und Unklarheiten zu schärfen und sich mit der Sache intensiver auseinanderzusetzen. Es fehlt dann der Raum, zwischen den Welten des „Singulären“ und „Regulären“ eine Brücke zu schlagen, wie Ruf/Gallin (1998) einerseits die individuellen Sichtweisen des Einzelnen und andererseits die generellen, konsolidierten Prägungen bezeichnen. Sie fordern, dass Lernende insbesondere beim Beginn des Lernprozesses die Möglichkeit haben, ausgehend vom Singulären der eigenenen Gedanken eine Verbindung zum Regulären zu schaffen. Die hier deutlichen Eigenwahrnehmungen der Lernenden, das informelle Reden unter Mitschülerinnen und -schülern Wert zu schätzen, stützt die in den Kapiteln 9.1 und 9.2 dargestellten Untersuchungsergebnisse zu den im Gruppenprozess vollzogenen kommunikativen Handlungen.

Neben dem unmittelbaren Klären und Erklären in der Kleingruppe nennen Schülerinnen und Schüler in den freien Anmerkungen noch weitere Gründe, die eine positiven Einschätzung der Sozialform „Lernwerkstatt“ erklären helfen: So formulieren 17 Lernende, dass eine solche Arbeitsform sinnvoller sei, da sie mehr „eigenständiges Arbeiten fördert“ und 18 betonen den Aspekt der „willkommenen Abwechslung und des Spaßes bei der Arbeit“. Den Vorteil der Förderung der Selbstständigkeit formulierten auch viele Schülerinnen und Schüler in informellen Gesprächen nach den Unterrichtsstunden, allerdings nicht immer in einer positiven Konnotation. Manche sehen darin zwar theoretisch einen Vorteil, empfinden es aber konkret als zu große Belastung wegen des erhöhten persönlichen Arbeitsaufwands. Dieser Aspekt wird weiter unten noch näher betrachtet.

Die theoretische Wertschätzung einer neuen Unterrichtsform allein bewirkt jedoch noch nicht, dass man sich diese auch tatsächlich für den konkreten Unterricht wünscht. Hier wissen Schülerinnen und Schüler offenbar sehr wohl zu unterscheiden. Es werden konkrete Erfahrungen genannt, warum das Potenzial der Lernwerkstatt nicht voll ausgeschöpft wurde bzw. es werden dementsprechend Verbesserungsvorschläge formuliert, um das Material effizienter zu nutzen. Dabei werden im Wesentlichen die beiden folgenden Punkte genannt:

- Die Lehrperson sollte für Fragen offen sein und Unklarheiten klären helfen (besonders vor der Klausur).
- Man müsste eine solche Unterrichtsform stärker gewohnt sein.

Der erste Aspekt, der zur Hälfte als Kritik an der konkreten Durchführung und zur anderen Hälfte als Bedingung genannt wurde, deutet auf das Problem der besonderen Lehrerrolle bei einer solchen Unterrichtsform hin. Auch wenn davon auszugehen ist, dass die Lehrpersonen, die sich zur Teilnahme an diesem Projekt gemeldet haben, engagiert und an Innovationen interessiert sind, so kann es doch sein, dass auch ihr Unterricht fragend-entwickelnd geprägt ist. Krainer (2002) nennt dies für Deutschland und Österreich generell das zentrale Merkmal des Mathematikunterrichts. Ist eine Lehrperson in erster Linie diese übliche Unterrichtsform gewohnt, sind die eigenen Routinen darauf ausgerichtet und sehr stabil (vgl. [Schlöglmann 2005]). Handlungsunsicherheit bei der Integration von Gruppenarbeit und erst recht von langfristiger Gruppenarbeit ist dann sehr wahrscheinlich. Die Moderation eines solch offenen Unterrichts erfordert gänzlich andere Routinen und Paradigmen als eine fragend-entwickelnde Unterrichtskultur, denn es gilt die Balance zu finden zwischen einem helfenden, erklärenden Eingreifen und einem Gewähren lassen, um die Lernenden in ihrer Selbstständigkeit zu unterstützen und in Ruhe eigene Wege finden und beschreiten zu lassen. Die Äußerung eines Lehrers „*Dann sollen die Schüler jetzt mal machen*“ kann dabei eine Haltung beschreiben, die für Schülerinnen und Schüler sowohl mit einem wohltuenden Freiraum verbunden ist als auch mit einer unbeteiligten Distanz, bei der sie sich zu wenig unterstützt fühlen. Das letzte wird von 47 Schülerinnen und Schüler explizit als Kritik an der Lehrperson explizit formuliert. Man beklagt, dass es zu wenig Kontrolle gab und wünschte sich mehr Führung.

Andere wiederum empfinden die Arbeit in der Lernwerkstatt als zu schwer (29), darunter auch solche, die einen extremen Leistungsabfall beklagen. Dies sind 11 Schülerinnen und Schüler (8 Schüler, 3 Schülerinnen), wobei drei Schülerinnen und zwei Schüler zusätzlich formuliert haben, dass Sie die Lernwerkstatt zwar als sinnvoll ansehen, diese für sie jedoch nicht erfolgreich war. Auch hier werden die bereits genannten Bedingungen für einen Erfolg im Rahmen dieser Lernform als Gründe für das eigene schlechte Abschneiden genannt: die fehlende Unterstützung durch die Lehrperson sowie das Ungewohnte der Arbeitsform.

Insgesamt scheinen bei den freien Anmerkungen sehr unterschiedliche, extreme Schülerprofile durch:

- Leistungsstarke Schülerinnen/Schüler, die sich durch eine solche Arbeitsform in besonderer Weise positiv gefordert sehen
- Leistungsstarke Schülerinnen/Schüler, die eine solche Arbeitsform ablehnen
- Leistungsschwache Schüler/Schülerinnen, die in dieser Lernform einen Lernvorteil für sich sehen
- Leistungsschwache Schüler/Schülerinnen, die diese Lernform als zusätzliche Belastung und Erschwerung deutlich ablehnen.

Für alle verschiedenen Typen scheinen jedoch die beiden genannten Faktoren der Unterstützung durch die Lehrperson und das Gewöhnen an diese Arbeitsform maßgeblich für den Erfolg zu sein. Welche weiteren Faktoren für unterschiedliche Schülertypen den Erfolg einer Lernwerkstatt bestimmen, wäre eine Anschlussstudie wert.

10.4 Auswertung des Lehrerfragebogens

Insgesamt bestätigt sich, was sich bereits während der Pilotierung gezeigt hat, dass das Hauptinteresse der Lehrpersonen bei einer Rückmeldung darin liegt, wie das Material und die Unterrichtsorganisation bei einem erneuten Einsatz der Lernwerkstatt zu optimieren ist. Dies hat auch Jungwirth (2004) in ihren Untersuchungen herausgestellt. Diese Sicht ist verständlich, da alleine der prospektive Blick ein professionelles Weiterentwickeln möglich macht. Dennoch haben 18 Lehrpersonen sich auf die Mühe eingelassen, den Fragebogen auszufüllen. Weitere drei Lehrer haben anstelle dessen einen ausführlichen schriftlichen Bericht verfasst. Diese Briefform wurde damit begründet, dass der Fragebogen ihnen nicht als angemessen schien für ihre spezielle Rückmeldung. Darüberhinaus baten zwei Lehrer um ein persönliches Gespräch, um ihre persönlichen Eindrücke zu übermitteln. Damit liegen insgesamt Rückmeldungen von 21 Lehrpersonen vor, die aber nur schwer einheitlich auszuwerten waren. Da die Stichprobe von n=18 der ausgefüllten Fragebögen für eine detaillierte statistische Auswertung zu gering ausfiel, aber die Eindrücke und Erfahrungen aller 21 Lehrpersonen mit in die Auswertung einfliessen sollten, wurde eine Mischung verschiedener methodischer Ansätze gewählt, um mit dem Datenmaterial angemessen umzugehen. Das Ergebnis waren die folgenden Verfahren:

- Parallelbetrachtung gemeinsamer Items: Es gab 20 Items, die im Schüler- und Lehrerfragebogen identisch waren. Diese 20 Items wurden zusammen ausgewertet mit dem besonderen Fokus darauf, inwieweit die beteiligten Schüler- und Lehrerantworten differieren. Die Ergebnisse sind im folgenden Kapitel 10.5 zusammengefasst.

- Zu den sieben Themenbereichen, die sich aus der Auswertung der Items mit Ratingskalen aus dem Schülerfragebogen ergeben haben, wurden inhaltlich passende Items des Lehrerfragenbogens ausgewählt und das Antwortverhalten untersucht, um auf diese Weise die Einschätzungen der Lehrpersonen zu den sieben Themenbereichen zu ermitteln und mit den Einschätzungen der Schülerinnen und Schüler zu vergleichen.

10.5 Vergleichende Auswertung des Schüler- und des Lehrerfragebogens

Für die vergleichende Auswertung der beiden Fragebögen muss man zwischen den folgenden Typen von Items unterscheiden:

- **Identische Items**, die in beiden Fragebögen gleich sind. Zum Beispiel entspricht Item 29 im Schülerfragebogen wortgenau Item 23 im Lehrerfragebogen: „Im normalen Unterricht gibt es extra Übungsphasen - bei der Lernwerkstatt geht alles in einem: Stoff erarbeiten und üben.„

- **Parallele Items**, die sich auf den gleichen Aspekt im Lernprozess der Schülerinnen und Schüler beziehen, aber jeweils eine andere Sicht erfragen. Im Schülerfragebogen geht es um die Selbstwahrnehmung der

Lernenden und im Lehrerfragebogen um die Fremdwahrnehmung durch die Lehrperson. Zum Beispiel lautet Item 3 im Schülerfragenbogen: „Durch die Lernwerkstatt habe ich einen neuen Zugang zu Mathematik gewonnen.“ Entsprechend ist Item 2 im Lehrerfragebogen: „Durch die Lernwerkstatt konnten die Schüler/innen einen neuen Zugang zu Mathematik gewinnen.“

- **Spezielle Items**, die jeweils nur im Schüler- oder nur im Lehrerfargebogen vorkommen. Ein Beispiel aus dem Schülerfragenbogen ist Item 21: „Unserer Gruppe fehlte zwischendurch die Rückmeldung, ob wir auf dem richtigen Weg sind.“ und ein Beispiel aus dem Lehrerfragebogen ist Item 24: „Es ist mir schwer gefallen, mich zurückzuhalten. Ich wollte lieber gleich erklären und die entscheidenden Tipps geben.“

Da auf die speziellen Items bereits in den Kapiteln 10.3 und 10.4 eingegangen wurde, geht es im Folgenden ausschließlich um die 22 identischen bzw. parallelen Items, die einer gemeinsamen Analyse unterzogen wurden.

Dabei gab es zwei unterschiedliche Antwortformate der Items, die auch eine unterschiedliche Art der Auswertung erfordern. Es gab zwölf Items mit Ratingskalen, in Tabelle 10.13 aufgelistet sind. Diese wurden hinsichtlich der Einschätzungen zum Arbeitsaufwand, zum selbstständigen Lernen und zum Rechnereinsatz an Hand markanter Items untersucht. Zum anderen kamen neun Items mit vorgegebenen Antworten zum Ankreuzen vor. Dazu zählten die folgenden Items:

- **Fünf Items zur Beurteilung der einzelnen Bausteine**: Dabei wurde jeweils die Liste der Bausteine der Lernwerkstatt mit der Kurzbezeichnung durch die Großbuchstaben (vgl. Kapitel 3) vorgegeben und es galt, diese Liste unter verschiedenen Fragestellungen anzukreuzen (Mehrfachantworten waren möglich!). Fragen waren:
  - Welche Bausteine haben am meisten Spaß gemacht? (Schülerfrage 4, Lehrerfrage 5)
  - Welche Bausteine haben am wenigsten Spaß gemacht? (Schülerfrage 5, Lehrerfrage 6)
  - Welche Bausteine waren am leichtesten? (Schülerfrage 6, Lehrerfrage 7)
  - Welche Bausteine waren am schwierigsten? (Schülerfrage 7, Lehrerfrage 8)

  - Bei welchen Bausteinen ist am meisten klar geworden? (Schülerfrage 8, Lehrerfrage 9)

- **Zwei Items zur Beurteilung der Schülertätigkeiten**: Hier ging es darum, welche Schülertätigkeiten zu kurz kamen (Schülerfrage 18, Lehrerfrage 16) bzw. welche besonders gefördert wurden (Schülerfrage 19, Lehrerfrage 18).

  Daneben gab es noch zwei identische Items. Ein Item galt der Frage, wie oft man eine solche Lernwerkstatt im Halbjahr einsetzen sollte (Schülerfrage 33, Lehrerfrage 31). Das andere Item war: „Stellen Sie sich vor, Sie haben eine Minute Zeit, jemandem zu erklären, was eine Funktion ist. Welche Darstellungsart würden Sie dabei am ehesten verwenden: einen Term, einen Graphen, eine Zahlentabelle, eine Anwendungssituation, allgemeine Umgangssprache, eine Definition?“ (Mehrfachantworten waren möglich, leider fehlte irrtümlich „eine Defintion“ im Schülerfragebogen; Schülerfrage 14, Lehrerfrage 15)

Im Folgenden werden die Untersuchungen zu diesen Items detaillierter ausgeführt:

10.5.1 Gemeinsame Items mit Ratingskala

Die zwölf identischen bzw. parallelen Items mit Ratingskala, die einer gemeinsamen Untersuchung unterzogen wurden, sind in Tabelle 10.13 dargestellt.

Bei den beiden Items in der vierten und letzten Zeile (Schülerfrage 27/ Lehrerfrage 25 und Schülerfrage 44/ Lehrerfrage 37) sind leicht unterschiedliche Formulierungen zu finden. Da es aber bei beiden Items von Interesse ist, die Einschätzungen zu vergleichen, sind beide Items trotz dieser Nuancen in den Formulierungen in die vergleichende Analyse einbezogen worden. Dies ist bei Item 27 (bzw. 25) inhaltlich zu vertreten, da die Konnotation „zu anstrengend“ sich zwar bei der Schülerfrage auf die Arbeit in der Gruppe und bei der Lehrerfrage auf die selbstständige Arbeit bezieht, doch da die selbstständige Arbeit im Rahmen des Unterrichtens mit der Lernwerkstatt immer als Gruppenarbeit vollzogen wurde, ist die Parallelität der Bezugsgröße für die Aussage gegeben. Das gilt auch beim Item zur Heftführung (letzte Zeile in Tabelle 10.13). Es ist davon auszugehen, dass sich die Ausführlichkeit der Heftführung, wie sie bei der Schülerfrage ausgedrückt ist, aus Aspekten ergibt, die mit der Empfehlung zu einem Lerntagebuch zusammenhängen. Das

Schülerfragebogen	**Lehrerfragebogen**
3. Durch die Lernwerkstatt habe ich einen neuen Zugang zu Mathematik gewonnen.	2. Durch die Lernwerkstatt konnten die Schüler/innen einen neuen Zugang zu Mathematik gewinnen.
13. Mir hat es geholfen, dass Funktionen in verschiedenen Darstellungsarten (..) einbezogen wurden.	14. Es war hilfreich, dass die verschiedenen Darstellungsarten einer Funktion (..) so oft einbezogen wurden.
16. Es war viel zu schwer, sich selbst Definitionen auszudenken (..).	11. Für die Schüler/innen war es zu schwer, sich selbst Definitionen auszudenken (..).
27. Mir ist es zu anstrengend, so lange in einer Gruppe zu arbeiten.	25. Es ist für die Schüler/innen zu anstrengend, so lange selbstständig zu arbeiten.
30. Mir ist Unterricht lieber, bei dem die Lehrperson alles erklärt und vorrechnet.	26. Mir ist Unterricht lieber, bei dem ich zunächst den neuen Stoff erkläre bzw. neue Verfahren vorrechne.
29. Im normalen Unterricht gibt es extra Übungsphasen - bei der Lernwerkstatt geht alles in einem: Stoff erarbeiten und üben.	23. Im normalen Unterricht gibt es extra Übungsphasen - bei der Lernwerkstatt geht alles in einem: Stoff erarbeiten und üben.
31. Wir haben uns viel mehr gegenseitig erklärt.	27. Die Schüler/innen haben sich viel gegenseitig erklärt.
37. In unserer Gruppe haben wir sehr häufig den Rechner benutzt.	34. Der Rechner wurde sehr häufig benutzt.
36. Ohne den Rechnereinsatz wäre die Lernwerkstatt nicht sinnvoll.	33. Ohne den Rechnereinsatz wäre die Lernwerkstatt nicht sinnvoll.
41. Ich habe in der Zeit der Lernwerkstatt zu Hause deutlich weniger getan als sonst.	35. Die meisten Schüler/innen haben in der Zeit der Lernwerkstatt zu Hause deutlich mehr getan als sonst.
42. Ich habe in der Zeit der Lernwerkstatt im Unterricht deutlich weniger getan als sonst.	36. Die meisten Schüler/innen haben in der Zeit der Lernwerkstatt im Unterricht deutlich mehr getan als sonst.
44. Ich habe mein Heft ausführlicher geführt als sonst.	37. Es haben nur wenige Schüler/innen ihr Heft im Sinne eines Lerntagebuchs (vgl. „Musterblatt für die Dokumentation“, S.15 im Lehrerbegleitheft) geführt, die meisten machten es traditionell.

Tabelle 10.13: Parallel-Items im Schüler- und im Lehrerfragebogen

Item-Paar 41 bzw. 35 ist gegensätzlich kodiert, was bei der Auswertung zu beachten ist.

Positive Einschätzung des Arbeitsaufwandes

Hier wurden die Items -41 bzw. -35; -42 bzw. -36 und 44 bzw. 37 [1] zusammengefasst, es geht sowohl um den Arbeitsaufwand im Unterricht wie zu Hause, insbesondere bezogen auf die Heftführung.

Vergleicht man die Antworten im Bereich dieses Aspekts von Lehrenden und Lernenden, fallen kaum Unterschiede auf. Es ist lediglich festzustellen, dass die Lehrpersonen eine Tendenz zeigen, den Arbeitsaufwand ihrer

[1] Ein Vorzeichen-Minus wurde gesetzt, wenn die Richtung der bewerteten Aussage umgekehrte Konnotation aufwies wie das entsprechende Parallel-Item.

Schülerinnen und Schüler höher einschätzen als diese selbst.

Positive Einschätzung des Selbstständigen Lernens

Hier wurden die Items -16 bzw. -11; -27 bzw. -25 und -30 bzw. -26 zusammengefasst.

Die beiden Aspekte, ob das selbstständige Definieren als zu schwer angesehen wird und ob das lange Arbeiten in der Gruppe als zu anstrengend empfunden wird, schätzen Lernende und Lehrende sehr ähnlich ein. Auffällig unterschiedlich ist die Einschätzung des Statements: „Mir ist Unterricht lieber, bei dem die Lehrperson alles erklärt und vorrechnet." (Schülerfrage 30, Lehrerfrage 26). Schülerinnen und Schüler lehnen dieses Statement zu 27,1% ab und stimmen zu 56,9% zu, Lehrpersonen dagegen lehnen es zu 61,1% ab und stimmen nur zu 11,2% zu. Hier sind bei beiden Gruppen ganz unterschiedliche Gründe denkbar. Für Schülerinnen und Schüler könnte, wie bereits in Kapitel 10.3 ausgeführt, der lange Atem, der für eine Kleingruppenarbeit nötig ist, auch demotivierend wirken. Werden die Impulse der Lehrperson als das erlebt, was sie im besten Fall sein sollen – tragend, hilfreich und nützlich – dann ist Kleingruppenarbeit im Vergleich unattraktiv. Sie kann sogar als belastend erlebt werden, da man nicht nur für den eigenen Lernprozess verantwortlich ist, sondern auch andere mittragen und mit motivieren muss. Für Lehrpersonen dagegen sind mit einer solchen Arbeitsform, sofern sie grundsätzlich davon überzeugt sind, viele Vorteile und neue Perspektiven verbunden. So kann man die Lernenden individueller und gezielter mit ihren Schwierigkeiten und besonderen Ideen wahrnehmen und erleben. Es stimmen 57,9% der Lehrpersonen dem Item 21 zu, dass sie bei einer solchen Arbeitsform mehr von Einzelnen mit bekommen. Zudem erleben die meisten Lehrpersonen (73,7%) diese Unterrichtsform nicht anstrengender als herkömmlichen Unterricht.

Positive Einschätzung des Rechnereinsatzes

Zu diesem Aspekt gehören die beiden Items 36 bzw. 33 und 37 bzw. 34.

Die Einschätzungen bezüglich des Rechnereinsatzes sind bei beiden Gruppen ähnlich positiv. 65,5% der Lernenden und 72,2% der Lehrenden stimmen zu, dass ohne den Rechnereinsatz die Lernwerkstatt nicht sinnvoll wäre (Schülerfrage 36, Lehrerfrage 33). Auch die Einschätzung bezüglich der Häufigkeit der Nutzung des Rechners ist sehr ähnlich: 72,6% der Lernenden und 94,4% der Lehrenden geben an, dass der Rechner häufig genutzt wurde (Schülerfrage 37, Lehrerfrage 34).

10.5.2 Beurteilung der Bausteine

Vergleicht man, wie Lehrende und Lernende die einzelnen Bausteine der Lernwerkstatt beurteilen, so werden doch einige interessante Unterschiede deutlich. Ausgangspunkt der Untersuchung sind die Zahlenwerte in Tabelle 10.14. Es sind die Angaben, wieviel Prozent der Lehrenden bzw. Lernenden den jeweiligen Baustein unter der jeweiligen Fragestellung angekreuzt haben. Aufgrund der geringen Zahl der zurückgesendeten Lehrerfragebögen haben die nachfolgenden Aussagen lediglich tendentiellen Charakter, da einzelne Stimmen großes Gewicht haben. Da sich jedoch beim Vergleich der Schüler- und Lehrerantworten interessante Aspekte zeigen, soll auf diesen Teil der Auswertung nicht verzichtet werden. Es wurden die folgenden vier Fragen einbezogen:

- Welcher Baustein hat Ihnen (bzw. hat den Schüler/innen) am meisten Spaß gemacht? (Schülerfrage 4, Lehrerfrage 5) (in Tabelle 10.14 mit „Spaß“ abgekürzt)
- Welchen Baustein empfanden Sie am leichtesten (für die Schüler/innen)? (Schülerfrage 6, Lehrerfrage 7) (in Tabelle 10.14 mit „Leicht“ abgekürzt)
- Welchen Baustein empfanden Sie am schwierigsten (für die Schüler/innen)? (Schülerfrage 7, Lehrerfrage 8) (in Tabelle 10.14 mit „Schwer“ abgekürzt)
- Bei welchem Baustein ist Ihnen (bzw. den Schüler/innen) am meisten klar geworden? (Schülerfrage 8, Lehrerfrage 9) (in Tabelle 10.14 mit „Klar“ abgekürzt)

Die Frage danach, welcher Baustein am wenigsten Spaß macht (Schülerfrage 5, Lehrerfrage 6), konnte leider nicht einbezogen werden, da hier in der Online-Version des Lehrerfragebogens irrtümlicherweise keine Mehrfachnennung möglich war, von daher war hier die Vergleichbarkeit nicht gegeben. Einen Überblick über die Beurteilung der einzelnen Bausteine bzgl. der vier genannten Fragen gibt Tabelle 10.14. Die genauere inhaltliche Beschreibung der einzelnen Bausteine findet sich in Kapitel 3 sowie in [Barzel/Fröhlich/Stachniss-Carp 2003].

Bei der genaueren Betrachtung fällt zunächst auf, dass bei allen vier Fragen alle Bausteine genannt werden, es nur sehr wenige gibt, die von mehr als 50% der Personen genannt werden. Die Bausteine in den letzten Zeilen der Tabelle werden seltener genannt. Das mag daran liegen, dass nach Angaben

	Spaß		Leicht		Schwer		Klar	
Baustein	SuS	**LuL**	SuS	**LuL**	SuS	**LuL**	SuS	**LuL**
W	16,9	**5,6**	34,9	**27,8**	9,7	**16,7**	14,8	**0**
A	31,6	**50**	42,3	**22,2**	5,8	**16,7**	20,8	**11,1**
E	25,1	**38,9**	14,6	**16,7**	18,8	**16,7**	34,8	**83,3**
L	36,7	**5,6**	27,9	**50**	10,6	**11,1**	39,6	**11,1**
K	22	**11,1**	6,5	**11,1**	35,1	**50**	29,7	**33,3**
S	22,4	**5,6**	21	**27,8**	16,7	**5,6**	17,6	**0**
N	25,5	**16,7**	17,3	**33,3**	16,2	**5,6**	25,9	**16,7**
R	15	**44,4**	7,4	**5,6**	8,2	**5,6**	6,1	**22,2**
G	7,3	**5,6**	3,5	**0**	11,7	**5,6**	7	**5,6**
Z	7	**27,8**	5	**11,1**	9,5	**5,6**	3	**11,1**
C	11	**0**	5	**5,6**	12,1	**5,6**	7	**16,7**
Q	7,2	**5,6**	5	**5,6**	10	**5,6**	3,6	**0**
F	6,2	**0**	2	**0**	31	**33,3**	5,7	**0**

Tabelle 10.14: Beurteilung der Bausteine durch Lehrer/-innen(LuL) und Schüler/innen (SuS)(in %; LuL: n=18 und SuS: n=578)

der Lehrpersonen im Fragebogen die Bausteine R, G, Z, C, Q, F von ca. einem Viertel der Lehrpersonen nicht als Pflicht für die Lernwerkstatt vorgeschrieben waren. Dennoch konnten diese Bausteine von allen Schülerinnen und Schüler bearbeitet werden, da sie die Materialien zu allen Bausteinen zur Verfügung hatten. Die Bausteine W, A, E, L, K, S und N wurden sicher von allen Schülerinnen und Schülern bearbeitet.

Es ist erstaunlich, dass in der Spalte zur Frage, was am meisten Spaß gemacht hat, die Schülerinnen und Schüler die Bausteine der ersten sieben Zeilen alle relativ oft nennen. Dies ist bei den Antworten der Lehrpersonen anders, die eher als die Schülerinnen und Schüler die Spiele (Bausteine Z und R) sowie das Experiment (in Baustein A) nennen. Lehrende scheinen mit diesen Spielen viel eher Spaß im Lernprozess zu verbinden als Lernende. Eine unterschiedliche Beurteilung kann auch angenommen werden bei den Bausteinen, bei denen es um das Erarbeiten der neuen Inhalte an Hand von Aufgaben und Analysen ging. So werden die Bausteine W (Wiederholungen zu „Ableitung"), K (Krümmung) , L (höhere Ableitungen), S (Symmetrie) und N (Nullstelle) eher von Lernenden mit Spaß verbunden als von Lehrpersonen. Spaß und mathematische Inhalte erarbeiten gehören für Lehrende anscheinend viel weniger zusammen als für Lernende. Ein möglicher Grund kann hier im Bild von Mathematik liegen, das für die Lehrpersonen vielleicht eher dadurch geprägt ist, dass das rein theoretische Erarbeiten mathematischer Zusammenhänge Lernenden keinen Spaß bereitet, zumindest aber weniger als das Anwenden im Rahmen eines Spiels oder Experiments. Für Schülerinnen und Schüler mag dies anders sein. Für sie kann der Erkenntnisgewinn bei der Arbeit auch Spaß fördernd sein. Zumindest werden die Bausteine, denen am häufigsten Spaß zugeschrieben wird, auch am häufigsten als die Bausteine genannt, bei denen am meisten klar wurde. Dies gilt speziell für die Bausteine A, E, L, S, K und N.

Es sind nicht nur die Bausteine mit den Spielen und dem Experiment, die von Schülerinnen und Schülern bzw. Lehrpersonen unterschiedlich wahrgenommen werden, sondern ebenso die Bausteine, bei denen zentrale Aspekte der Funktionsuntersuchung theoretisch erarbeitet werden. So werden zum Beispiel die für die Erarbeitung der mathematische Inhalte zentralen Bausteine K,L und E in allen vier Fragen sehr unterschiedlich beurteilt - insbesondere Baustein L. Hier lohnt eine genauere Betrachtung. Bei Baustein L geben 36,7% der Schülerinnen und Schüler an, dass er mit am meisten Spaß gemacht hat - das erwarten allerdings nur 5,6 % der Lehrpersonen. Gleichzeitig geben 39,9 % der Schülerinnen und Schüler gegenüber nur 11,1% der Lehrenden an, dass bei diesem Baustein am meisten klar wurde. Im Zentrum des Bausteins L stehen höhere Ableitungen und ihre Bedeutungen (vgl. Seite 26). Dazu wird zunächst in einem Informationskasten angegeben, was man unter einer höheren Ableitung versteht. Als Aufgabenstellungen kommen in einer Mind map angeordnet vor (hier nur in Kurzfassung):

- Wie oft muss man ableiten, bis sich zum ersten Mal der Ableitungsterm Null ergibt?
- Informieren Sie sich darüber, was man unter einem Wendepunkt versteht.
- Stellen Sie folgende (drei) Funktionen und alle Ableitungsfunktionen grafisch dar. Benutzen Sie für jede Funktion ein neues Koordinatensystem. Finden Sie möglichst viele Zusammenhänge zwischen dem Graphen der Funktion und deren Ableitungen. Ziehen Sie allgemeine Schlüsse und vervollständigen Sie die Tabelle 10.15

Grad der Funktion	Max. Anzahl Nullstellen	Max. Anzahl Extrempunkte	Max. Anzahl Wendepunkte

Tabelle 10.15: Tabelle aus Baustein L

Nun ist die Frage, warum wurde dieser Baustein von 36,7% Schülerinnen und Schüler bezüglich des Spaß Machens am häufigsten gewählt. Die wesentlichen kognitiven Tätigkeiten, die hier angeregt werden sollten, waren laut Konzeption: Analysieren, Informieren, Strukturieren. Es ist also eine Mischung ganz unterschiedlicher Aktivitäten zu verzeichnen, die als solches bereits einen Reiz ausmachen können – zumal gleich dem Zusammensetzen verschiedener Puzzleteile – verschiedene Aspekte betrachtet und in Verbindung gebracht werden müssen. Dazu gehören: Grad einer Funktion, höhere Ableitungen, Nullstellen, Wendepunkte, Extrempunkte. Dabei können auch viele neue Informationen auftreten: Auf jeden Fall sind „höhere Ableitungen“ und „Wendepunkte“ als Begriffe neu. „Grad einer Funktion“ kann für manche neu sein, weshalb dieser Begriff in der Fußnote kurz erklärt wird. Auch „Extrempunkte“ können fremd sein, sofern Baustein E erst nach L bearbeitet wird. Die Reihenfolge, erst L, dann E, liegt rein äußerlich nahe, da bei der sequentiellen Anordnung der Bausteine im Schülerheft Baustein E nach Baustein L kommt. (Diese sequentielle Anordnung ist zwar bedauerlich, aber bei einer Publikation in Papierform nicht anders möglich.)

Die Fülle an inhaltlichen Querverbindungen und neuen Informationen in Baustein L kann für Schülerinnen und Schüler nicht nur bezüglich des Stoffes erhellend sein, sondern eben auch Spaß machen. Immerhin haben 50% der Schülerinnen und Schüler, denen Baustein L am meisten Spaß machte auch gleichzeitig angekreuzt, dass ihnen dabei auch am meisten klar geworden ist. Einen Beleg für diese mögliche Erklärung liefert auch die Analyse in Kapitel 9.2. Diese Analyse bezieht sich auf eine Gruppenarbeit an Baustein L. Hier hatte sich gezeigt, dass gerade das Ausfüllen der Tabelle in vielfältigem Sinne motivierend war: Es brachte viel Gesprächsanlass, war als Aufgabe überschaubar und fassbar genug, um nicht den Spaß zu verlieren, barg aber dennoch einige zu bewältigende Probleme mit sich. Gerade das Strukturieren im Rahmen dieser Aufgabe scheint für Schülerinnen und Schüler eine akttrative und lohnende Tätigkeit zu sein, da auch viel „altes“ Wissen herangezogen und genutzt werden kann (z.B. Wissen über Parabeln und Geraden), um eine Systematik zu finden. Es erfordert nicht nur das Abspulen einer vorgebenen Abfolge an Tätigkeiten, sondern vielmehr einen offenen Blick für Zusammenhänge, Strukture und Muster, wobei auch kleinere Erfolgserlebnisse möglich sind.

In der Wahrnehmung der Lehrpersonen spielt weniger Baustein L, sondern vielmehr Baustein E eine solch tragende Rolle. 38,9% der Lehrpersonen kreuzten Baustein E an als das, was den Schülerinnen und Schüler (nicht ihnen selbst!!) am meisten „Spaß“ macht. 83,3% gaben sogar an, dass den Lernenden hier inhaltlich am meisten klar werden kann. Diese Zahlen sind tendentiell höher als die entsprechenden bei den Schülerinnen und Schüler (vgl. Tabelle 10.14). Dies mag sicherlich an der in E geforderten Analyse dreier Funktionen hinsichtlich Extremstellen liegen, die als Fundament dienen sollte, um ein rechnerisches Verfahren zur Bestimmung von Extremstellen zu ermitteln. Dieses Verfahren steht oft im Zentrum der klassischen Kurvendiskussion in der Schule und mag ein möglicher Grund für eine solch starke Betonung des Bausteins E sein. Zum anderen kann die in Baustein E geforderte Parallelanalyse der drei Funktionen in drei verschiedenen Darstellungsarten (eine Funktion ist als Term, die andere als Graph und die dritte als Tabelle gegeben) für Lehrpersonen eine lohnende und klärende Tätigkeit sein.

In der Wahrnehmung und Beurteilung von Baustein K (Krümmung) stimmen Lehrende und Lernende am ehesten überein. Er wird von den meisten mit dem Attribut „am schwierigsten" versehen und etwa ein Drittel der Lernenden wie Lehrenden sehen ihn als einen Baustein an, bei dem am meisten klar wird. Unterschiedlich ist nur, dass 22% der Schülerinnen und Schüler trotzdem an den Tätigkeiten bei Baustein K Spaß hatten, was nur 11% der Lehrpersonen erwartet haben. Auch dies bezieht sich auf den bereits beschriebenen möglichen Effekt, dass das Neu-Erarbeiten mathematischer Sachverhalte durchaus Spaß machen kann.

Die Frage, ob das „am meisten klar geworden" eher mit „am leichtesten" oder „am schwierigisten" oder mit „am meisten Spaß" zusammenhängt, konnte nicht eindeutig beantwortet werden. Erwartungsgemäß bedingen sich die Kategorien „am leichtesten" und „am schwierigsten" gegenseitig. Bezogen auf die anderen Kategorien gab es aber nie mehr als 50% der Schülerinnen und Schüler, die auf einen Baustein bezogen diesen Baustein auch bei einer weiteren Frage angekreuzt haben. Man kann also sagen, dass die drei Kategorien Spaß, inhaltliches Klären, Schwierigkeitsgrad als unabhängig anzusehen sind. Dies wurde an Hand entsprechender Kontingenz-Koeffizienten überprüft.

10.5.3 Beurteilung der Schülertätigkeiten

Sowohl im Schüler- wie im Lehrerfragebogen gab es zwei direkte Items zu den Schülertätigkeiten (vgl. Anhang D, Schülerfragen 18 und 19, Lehrerfragen 16 und 18). Sie dienten dazu, die Einstellungen und Erfahrungen bezogen auf die kognitiven Tätigkeiten der Akteure zu ermitteln. Bei der Formulierung und Gestaltung dieser Items war es wichtig, dass die Begriffe bezüglich der kognitiven Tätigkeiten hinreichend verständlich sind. Deshalb wurde eine Liste mit Tätigikeiten vorgegeben, die es in zweierlei Hinsicht anzukreuzen galt (vgl. Tabellen 10.2 sowie 10.16).

Bei dieser Form der Auswertung sind einige Störfaktoren zu bedenken: So bleibt es unklar, ob sich die Einschätzungen auf das Unterrichtsmaterial oder den tatsächlich erlebten Unterricht beziehen. Außerdem können ganz

	Welche Tätigkeiten kamen bei der LWS zu kurz?		Bei welchen Tätigkeiten konnten Sie Fortschritte durch die LWS erzielen?	
	SuS	**LuL**	SuS	**LuL**
Strukturieren von Informationen	29%	**32%**	27%	**26%**
Abschreiben von Informationen (aus dem Schulbuch; vom Nachbarn)	20%	**21%**	9%	**26%**
Analysieren; genaues Hingucken	7%	**0%**	12%	**26%**
eigene (Lösungs-)ideen entwickeln	16%	**5%**	29%	**26%**
Mathematik in eigene Worte fassen	12%	**26%**	30%	**47%**
sich gegenseitig erklären	12%	**16%**	42%	**53%**
Wiederholen	11%	**5%**	8%	**58%**
nachschlagen (im Schulbuch, Internet oder Lexika)	13%	**16%**	53%	**84%**
schmarotzen (von der Arbeit anderer profitieren)	41%	**32%**	14%	**0%**
nachvollziehen von Gedanken	25%	**47%**	11%	**16%**
dokumentieren und Heft führen	13%	**11%**	12%	**32%**
Graphen zeichnen	29%	**37%**	32%	**42%**
über Mathematik reden	27%	**26%**	26%	**26%**
Zuhören	14%	**11%**	28%	**37%**
Arbeit organisieren	14%	**0%**	25%	**58%**
Üben	23%	**5%**	19%	**26%**

Tabelle 10.16: Angaben zu den Schülertätigkeiten (LuL: n=18 und SuS: n=578)

unterschiedliche Vorstellungen, Assoziationen und Interpretationen mit den einzelnen, vorgegebenen Tätigkeiten verbunden sein. Deshalb beschränkt sich die Auswertung dieses Teils der Fragebögen auf einige markante Aspekte, die trotz dieser Störfaktoren wahr genommen werden sollten.

Zunächst fällt auf, dass Lehrpersonen bei der Frage nach möglichen Fortschritten mehr angekreuzt haben als die Schülerinnen und Schüler. Die Prozentzahlen auf Seiten der Lehrpersonen liegen fast immer höher als die der Schülerinnen und Schüler. Die hier befragten Lehrpersonen, die sicherlich als besonders engagiert anzusehen sind, sehen also insgesamt einen größeren Fortschritt in mehreren der angegebenen Tätigkeiten als die Schülerinnen und Schüler. Im Schnitt haben 36% der Lehrpersonen eine Tätigkeit angekreuzt gegenüber 24% der Schülerinnen und Schüler. Dies mag daran liegen, dass Lehrende von ihrer Profession her viel stärker über die Art und Weise von Schüleraktivitäten nachdenken und diese deshalb eher wahrnehmen und erkennen als Lernende selbst, für die dieser Fokus eher ungewohnt ist.

Trotz dieses quantitativen Unterschieds lässt sich aber eine tendenzielle, qualitative Übereinstimmung in den Wahrnehmungen feststellen. So sind zum Beispiel von den fünf meist genannten Tätigkeiten in jeder der Gruppen drei Tätigkeiten gleich, die jeweils häufig genannt werden:

- nachschlagen (im Schulbuch, Internet oder Lexika) (84% der LuL, 53% der SuS)
- sich gegenseitig erklären (53% der LuL, 42% der SuS)
- Mathematik in eigene Worte fassen (47% der LuL, 30% der SuS)

Nachschlagen wird hier eingeschränkt auf Schulbuch, Internet oder Lexika. Dadurch wird das Nachschlagen in selbst verfassten Dokumentationen zwar nicht ausgeschlossen, aber es wird hier eher verstanden im Sinne von recherchieren, sich informieren, Hilfen aus fremden Texten ziehen. Entsprechend der Konzeption des Materials wurden die Lehrpersonen im Begleitheft aufgefordert, zusätzliche Informationsmaterialien (wie weitere Schulbücher, Lexika oder Internet) auszulegen bzw. zur Verfügung zu stellen. Es gab auch explizite Aufgabenstellungen, die das Recherchieren forderten (z.B. in Baustein L: „Informieren Sie sich darüber, was man unter einem Wendepunkt versteht!“). Dies ist sicherlich im Vergleich zu traditionellem Unterricht ungewohnt und neu, weshalb es hier verständlich ist, dass man hinsichtlich dieser Tätigkeit einen Fortschritt in der Lernwerkstatt wahrnimmt.

„Gegenseitiges Erklären“ und „Mathematik in eigene Worte fassen“ - dass hinsichtlich dieser Formen des informellen Redens ein deutlicher Fortschritt gesehen wird, haben zumindest Schüler und Schülerinnen im Rahmen der freien Anmerkungen explizit formuliert und bereits in den Items zum gegenseitigen Erklären (Schülerfrage 31 - Lehrerfrage 27) und zum Reden über Mathematik in eigener Sprache (Schülerfrage 15) zum Ausdruck gebracht. Das informelle Reden über Mathematik in der eigenen Sprache erfährt sowohl in der Lehrer- wie in der Schülerwahrnehmung eine hohe Wertschätzung.

Neben den drei genannten Tätigkeiten kommt bei den Lehrpersonen noch das „Wiederholen“ und „Arbeit organisieren“ als häufig Genanntes dazu. 58% der Lehrpersonen geben an, dass durch die Lernwerkstatt das Wiederholen als Tätigkeit gefördert wird. Bei den Schülerinnen und Schüler sind es nur 8%, die dies äußern. Diese erstaunliche Differenz mag an der unterschiedlichen Interpretation liegen, was zu einer Wiederholung gehört. Zwei prinzipiell verschiedene Sichtweisen sind denkbar, die diese unterschiedliche Bewertung erklären helfen: Eine Wiederholung kann explizit oder implizit erfolgen – explizit, wenn sie deutlich als Wiederholung ausgewiesen ist und sich auf bestimmtes, vorher erlerntes Wissen und Verfahren bezieht. Implizit heißt dagegen, dass die Wiederholung eher verdeckt im Kontext neuer Erarbeitungen erfolgt, wenn zum Beispiel bei der Strukturierung der Graphen ganzrationaler Funktionen die Merkmale der Graphen von quadratischen und linearen Funktionen wiederholt werden. Es ist denkbar, dass Schülerinnen und Schüler Wiederholung eher explizit verstehen, da Wiederholung für Schülerinnen und Schüler oft im Sinne der Vorbereitung auf Prüfungen bedeutsam sind. Lehrpersonen werden jedoch daneben viel stärker auch die impliziten Formen von Wiederholung wahrnehmen, die im Sinne des Spiralprinzips von Lehrenden in Lehrplänen und Didaktiken gefordert werden.

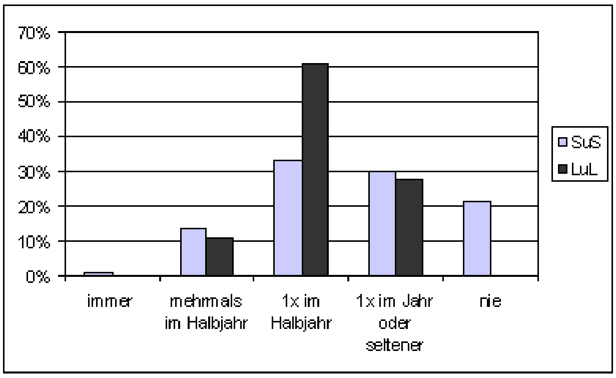


Abbildung 10.15: Wie oft sollte man eine solche Arbeitsform einsetzen?

Die Antworten zur Frage „Wie oft sollte man eine solche Arbeitsform einsetzen?“ sind der Abbildung 10.15 zu entnehmen. Im gezeigten Antwortverhalten kumulieren die vielen Aspekte zur Bewertung der Lernwerkstatt aus Sicht der Lehrenden wie Lernenden. Auch wenn ein Großteil der Schülerinnen und Schüler dieser Arbeitsform Positives abgewinnen konnten, so gibt es doch über 20%, die sich keine Lernwerkstatt mehr für den Unterricht wünschen. Die Gründe dafür sind sicher vielfältig, der Blick auf die freien Anmerkungen im letzten Item des Schülerfragebogens (vgl. Kapitel 10.3.2) gewährt im Rahmen der Studie den intensivsten Blick hierauf. Das Gros der Schülerinnen und Schüler sowie der Lehrpersonen wünscht sich jedoch einen wiederkehrenden Einsatz dieser Unterrichtsform. Dass die Lehrpersonen eine derartige Lernwerkstatt tendentiell eher einsetzen würden als die Schülerinnen und Schüler, kann auch an den 18 konkreten Lehrpersonen liegen, die ihr Engagement in vielerlei Hinsicht zum Ausdruck gebracht haben. Sie haben sich zum einen dazu bereit erklärt, die Lernwerkstatt zu testen und sich zum anderen die Zeit genommen, den Fragebogen zu beantworten. Diese Gruppe ist demnach vermutlich nicht repräsentativ für die gesamte Lehrerschaft, sondern eher sehr progressiv und aufgeschlossen.

Insgesamt stimmen alle Lehrenden und eine sehr große Mehrheit der Lernenden darin überein, dass diese Arbeitsform nur ein Weg unter vielen im Unterricht sein kann, „für immer“ taugt sie nicht. Als solche ist sie aber auch nicht konzipiert, sondern als sinnvolle und gute Bereicherung eines zeitgemäßen Mathematikunterrichts – und darin sind sich fast alle einig.

Kapitel 11

Resumee und Ausblick

11.1 Resumee

Auftrag von Schule ist es, Lernprozesse bei Jugendlichen anzustoßen, zu begleiten und zu evaluieren. Man weiß heute, dass Lernen nur dann nachhaltig geschieht, wenn Schülerinnen und Schüler interne Wissensnetze und Strukturen knüpfen können, wenn Lernen in diesem Sinne ein selbstständiger und konstruktiver Prozess des Individuums ist. Diese Erkenntnis ist vielfach wissenschaftlich gesichert und wird zunehmend mehr von Kolleginnen und Kollegen geteilt. Dennoch verändert sich Unterricht kaum, noch immer ist der Frontalunterricht die vorrangige Unterrichtsform in Deutschland. Der Stoffkatalog bleibt primärer Taktgeber von Unterricht. Weitere Ziele treten dahinter zurück. Dabei sehen Lehrpersonen vielfach das als erreicht an, was aus ihrer Sicht durchgenommen wurde.

Folgerichtig empfinden viele Lehrerinnen und Lehrer das Anstoßen individueller Lernprozesse als zeitraubend und unvereinbar mit den straffen Inhaltskatalogen des Curriculums. Das stringente, gelenkte Abarbeiten des Stoffes scheint der einzige Weg, die Vorgaben zu bewältigen. Die Forderung, Computeralgebra im Mathematikunterricht einzusetzen, wird dann als weitere, zusätzliche Belastung empfunden. Alle drei Zielbereiche - Inhalt, Medium und Selbstständiges Lernen werden als zeitlich additive und voneinander unabhängige Anforderungen gesehen.

Grundintention des Forschungsprojektes war es, aufzuzeigen, dass diese Aspekte keineswegs zu trennen sind, sondern als Trias eine realisierbare Einheit für Unterricht darstellen. Vor allem sollte exemplarisch verdeutlicht werden, dass diese Trias das Potenzial in sich trägt, Schülerinnen und Schülern nicht nur neue mathematische Inhalte nahe zu bringen, sondern sie gleichzeitig eine Fülle mathematischer Tätigkeiten erleben zu lassen und ihnen so eine Idee zu vermitteln, was Mathematiktreiben ausmacht. Sie sollten Mathematik nicht nur als Wissenschaft statischer Inhalte sondern als ein Werdendes und Prozessuales erfahren können – und das an einem Themenbereich aus dem Pflichtkanon. Dies war Kerngedanke bei Entwicklung und Evaluation der Lernwerkstatt zur Untersuchung ganzrationaler Funktionen mit integriertem Einsatz von Computeralgebra.

Die Unterrichtsmethode der Lernwerkstatt bietet den großen Vorteil, dass verschiedene inhaltliche Aspekte sowohl singulär wie auch als Teile eines Gesamtgefüges bearbeitet und wahrgenommen werden können. Schülerinnen und Schüler durchlaufen dabei über einen längeren Zeitraum (hier von circa sechs Wochen) verschiedene Stationen; Reihenfolge und Tempo bestimmen sie selbst. Weiteres konstituierendes Element dieser Lernwerkstatt ist die Verfügbarkeit von Computeralgebra, welche die Schülerinnen und Schüler, angeregt durch eigene Impulse oder durch die Aufgabenstellung, frei benutzen können. Durch den Einsatz der Computeralgebra wird der Kanon an möglichen Aufgabenstellungen stark erweitert und so die Reichhaltigkeit der angeregten Tätigkeiten erhöht.

Ziel der entwickelten Unterrichtseinheit war es, dass die Schülerinnen und Schüler Kriterien zur Funktionsuntersuchung kennen und diese souverän anwenden lernen. Dieses Ziel wurde sowohl hinsichtlich der inhaltlichen Kriterien konkretisiert wie auch bezüglich der Frage, welche kognitiven Tätigkeiten ein souveränes Anwenden dieser Kriterien im Einzelnen ausmachen. Als Kriterien wurden die Aspekte von Funktionsuntersuchung aus dem Lehrplan gewählt (z.B. markante Punkte von Funktionsgraphen, besondere Eigenschaften von Funktionen). Die spezifische Formulierung der möglichen Aktivitäten führte zu elementaren kognitiven Tätigkeiten, die für die Analysis insgesamt relevant sind. Diese lassen sich in fünf Bereichen zusammenfassen:

- Rezipieren als Wiederholen, Ausführen, Nachvollziehen
- Darstellen mathematischer Objekte in Term, Graph, Tabelle und Wort und Wechseln zwischen diesen Darstellungsformen
- Analysieren als Interpretieren und Strukturieren
- Reflektieren im Sinne von Vergleichen, neu Durchdenken von einem veränderten Standpunkt aus, Vernetzen
- Kreieren als schöpferischer Akt, neue Blickrichtungen, Beispiele, Ideen einzubeziehen.

Dementsprechend stand im Mittelpunkt der Evaluation der Lernwerkstatt die folgende Frage:

Welche kognitiven Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler treten im Rahmen dieser Lernwerkstatt mit integriertem Rechnereinsatz auf und inwiefern bewirken diese Tätigkeiten, dass im Themenbereich „Untersuchung ganzrationaler Funktionen“ neben inhaltlichen insbesondere auch prozessuale Ziele verfolgt werden?

Zur Beantwortung dieser Frage und um vielfältige Blickwinkel einbeziehen zu können, wurden verschiedene Instrumente empirischer Unterrichtsforschung miteinander verwoben. Tabelle 11.1 gibt einen Überblick über die einzelnen Teile der Gesamtstudie.

Begleitung eines Kurses Schwerpunkt: Qualitative Analyse	Die Lernwerkstatt in 50 Kursen Schwerpunkt: Quantitative Analyse
Transkriptanalyse einer Unterrichtssequenz „Legespiel“	Ergebnisse des vergleichenden Abschlusstests
Transkriptanalyse einer Unterrichtssequenz „Wendepunkt“	Auswertung der abschließenden Schülerbefragung
Vergleichende Analyse von Klausurlösungen	Vergleichende Auswertung der Schüler- und Lehrerbefragung

Tabelle 11.1: Die einzelnen Teile der Gesamtstudie

Die Forschungsfrage wurde an Hand von Teilfragen erörtert.

Inwieweit lassen sich die inhaltlichen Ziele des Themenbereichs mit Hilfe der Lernwerkstatt erreichen?

Die Ziele der Thematik lassen sich mit dem Einsatz der Lernwerkstatt realisieren. Die Schülerinnen und Schüler können Funktionen hnsichtlich verschiedener Kriterien untersuchen (im Einzelnen Nullstellen, Symmetrie, markante Punkte, Steigung) und wenden diese Kriterien auch flexibel an. Dies lässt sich durch die folgenden Ergebnisse belegen:

- Die im Rahmen der qualitativen Studie aufgenommenen Daten des begleiteten Experimentalkurses weisen darauf hin, dass die inhaltlichen Ziele, die mit dieser Thematik curricular verbunden sind, erreicht wurden. Zu diesen Daten gehören die Plakate zur Präsentation, Auszüge aus den Schülerheften sowie die Klausurergebnisse des Experimentalkurses bei der durchgeführten zentralen Vergleichsklausur in NRW nach

Abschluss der Lernwerkstatt. Dabei erfordert die Lernwerkstatt nicht mehr Zeit als eine klassische Unterrichtssequenz zur gleichen Thematik.

- Die Ergebnisse des Abschlusstests im Rahmen der quantitativen Studie zeigen, dass von außen gestellte Anforderungen in diesem Themenbereich von den Schülerinnen und Schülern, die die Thematik an Hand der Lernwerkstatt erarbeitet haben, genauso erfüllt werden wie von den Schülerinnen und Schülern der Vergleichsgruppe, die traditionell unterrichtet wurden.

- Die Befragung der Schülerinnen und Schüler im Anschluss an den Unterrichtsversuch im Rahmen der quantitativen Studie hat gezeigt, dass sich die Lernenden fachlich sicher fühlen. Auch wenn diese Selbsteinschätzung keine objektive Aussage über die erreichten Ziel zulässt, so rundet diese Selbsteinschätzung doch den Gesamteindruck bezogen auf die inhaltlichen Möglichkeiten der Lernwerkstatt ab.

- Auch die Lehrenden haben in der abschließenden Befragung formuliert, dass die inhaltlichen Ziele erreicht wurden und der zeitliche Rahmen vergleichbar war mit dem, den sie ansonsten bei traditioneller Unterrichtsweise gebraucht haben.

Entgegen der Befürchtung vieler Lehrpersonen ist also eine solche Gestaltung des Unterrichts nicht notwendig zeitintensiver als ein traditionell geführter Weg. Der zeitökonomische Aspekt steht zwar in dieser Studie am Rande, doch ist er wegen seiner Bedeutung für die breite Akzeptanz eines solchen Unterrichtsmaterials im Schulalltag der besonderen Beachtung wert.

Welche kognitiven Tätigkeiten lassen sich im Einzelnen im Rahmen der Lernwerkstatt beobachten?

Die Erwartung, dass durch die Lernwerkstatt die Schülerinnen und Schüler in besonderer Weise kognitive Tätigkeiten ausbilden können, hat sich bestätigt. Es sind Tätigkeiten und Fähigkeiten in allen fünf Bereichen erkennbar. Im Unterschied zu den Vergleichsgruppen lassen sich jedoch bei den Lernwerkstatt-Kursen besondere Schwerpunkte erkennen.

Schülerinnen und Schüler des Experimentalkurses zeigen eine bessere Graphen- und Termerkennung im Rahmen der abschließenden Klausur als die Schülerinen und Schüler der Vergleichsgruppen. Sie sind eher in der Lage, flexibel zwischen den Darstellungsarten Term und Graph zu wechseln. Sowohl in den Schüler- wie auch in den Lehrerfragebögen wird das Verwenden der verschiedenen Darstellungsarten als besonders hilfreich hervorgehoben.

Vorherrschender Tätigkeitsbereich in der Lernwerkstatt ist das Analysieren und Strukturieren. Dies lässt sich sowohl aufgrund der Eigenwahrnehmung der Beteiligten wie der Fremdwahrnehmung aus Forschersicht sagen. Im Rahmen der Unterrichtsanalysen wird deutlich, dass von den Schülerinnen und Schülern sowohl Terme, Graphen wie auch verbale Interpretationen vielfach analysiert werden. Der Freiraum für die eigenständige Arbeit in der Lernwerkstatt zwingt die Schülerinnen und Schüler dazu, selbst Impulse zu weiteren Schritten im Erkenntnisprozess zu setzen. Gerade diese Impulse entstehen in erster Linie dadurch, dass das Gegebene detailliert analysiert wird. Dies wird genutzt, um Sachverhalte neu zu ordnen, sich etwas gegenseitig zu erklären und weitere Belege für Vermutungen oder Verallgemeinerungen zu finden. Das Strukturieren von Graphen und Termen erfolgt deutlich sichtbar und wird genutzt, um Zusammenhänge zwischen verschiedenen Aspekten der Funktionsuntersuchung herzustellen.

Die beobachteten Handlungen der Lernenden sind dabei nicht nur durch die Aufgabenstellung vorgegeben, sondern werden häufig kreativ und gestaltend gesetzt. Dies gilt insbesondere bei den ersten Schritten zur Problemlösung wie auch bei der Suche nach neuen Wegen, wenn es nicht weitergeht oder bei der Wahl von Veranschaulichungen zur gegenseitigen Erklärung.

Dabei nutzen die Schülerinnen und Schüler auch metakognitve Strategien, um die Anforderungen zu bewältigen. Sie organisieren ihre Arbeit nicht nur im Mikrobereich einer Aufgabe sondern auch im Makrobereich über den gesamten Zeitraum der Lernwerkstatt. Sie entwickeln individuelle Wege zur Bewältigung von Schwierigkeiten, indem sie zum Beispiel zusätzliches Schriftwerk als Informationsquelle heranziehen, bewusst auf neuen Wegen die Problemlösung verändert ansetzen oder im Gespräch zunächst die Schwierigkeiten gemeinsam analysieren. Das Reflektieren des eigenen Tuns von einem höheren Standpunkt aus hilft sowohl als Lösungsstrategie bei Schwierigkeiten innerhalb einer Aufgabe (z.B. das Thematisieren der Bezugsgröße, auf die sich das Wenden im Graphenverlauf beziehen kann) als auch bezogen auf das bewusste Vergleichen und Verbinden bereits abgeschlossener Aufgaben unter neuem Blickwinkel.

Gerade die Synopse verschiedener Aspekte und das reflektierende Vernetzen ist in der Eigenwahrnehmung für Schülerinnen und Schüler wichtig für das Verstehen der inhaltlichen Zusammenhänge. Dementsprechend bewerten sie solche Bausteine der Lernwerkstatt als besonders wichtig für das eigene Verstehen, bei denen das Vernetzen verschiedener Aspekte angeregt wird. Die

Wahrnehmung der Lehrerinnen und Lehrer ist hier eine andere. Sie sehen für das Verstehen solche Bausteine als wichtig an, die singulär Einzelaspekte fokussieren und bei denen es um explizite Begriffsklärung geht.

Die Vielfalt der vollzogenen Tätigkeiten lässt sich nicht nur aufgrund der Außensicht auf den Unterricht bei den analysierten Unterrichtssequenzen erkennen, sondern wird auch von den Lernenden und Lehrenden selbst bewusst wahrgenommen und in der Abschlussbefragung herausgestellt. Insgesamt hat sich gezeigt, dass die Schülerinnen und Schüler mit ihren kommunikativen und kognitiven Aktivitäten sehr gut in der Lage sind, erkennbare Schritte im Begriffsbildungsprozess zu vollziehen.

Welche zentralen Vorteile der untersuchten Lernwerkstatt lassen sich aufgrund der Erkenntnisse herauskristallisieren?

Die wichtigste Grundlage, kognitive Schüleraktivitäten zu ermöglichen, liegt im Gewähren der freien Arbeit innerhalb der Schülergruppe – frei in dem Sinne, dass eine ständige Beobachtung und Kontrolle durch die Lehrperson entfällt. Durch die Lernwerkstatt wird insbesondere das informelle Reden über Mathematik gefördert. Dies wird auch von den Schülerinnen und Schülern als Vorteil in vielfältigen Rückmeldungen bewusst betont. Das hilft besonders Schülerinnen und Schülern mit einer mittelmäßigen bis schlechten Mathematiknote auf dem letzten Zeugnis, die die selbstständige Arbeit deutlich positiver bewerten als gute Schülerinnen und Schüler. Dieser wahrgenommene Vorzug der Lernwerkstatt steht für Schülerinnen und Schüler im Konflikt mit dem Wunsch, zu erfahren, ob das, was man tut oder herausgefunden hat, richtig oder falsch ist. Einen ähnlichen Zwiespalt sehen offenbar auch die Lehrenden. Auch sie sehen das informelle Reden als wichtig an, 45% der befragten Lehrpersonen äußern gleichzeitig die Befürchtung, dass sich Fehlvorstellungen einschleifen, wenn sie nicht unmittelbar verbessert werden. Dies könnte dazu führen, dass der Raum zum freien Reden über Mathematik sehr stark begrenzt wird. Hier wäre es zukünftig wichtig, geeignete Wege zu etablieren, die sowohl den Vorzug des freien informellen Redens gewähren wie auch dem Wunsch nach Bestätigung und Kontrolle nachkommen. So kann das regelmäßige Lesen der Lerntagebücher (z.B. pro Unterrichtsstunde ein Heft pro Schülergruppe, um den Arbeitsaufwand bewältigen zu können) der Lehrperson sowohl einen Überblick über den Arbeitsstand verschaffen wie auch mögliche Fehlvorstellungen aufdecken helfen und als Gesprächsgrundlage darüber dienen.

Welche Besonderheiten traten im Umgang mit dem selbstständigen Lernen auf?

Insgesamt scheint das Fehlen von Traditionen beim Umgang mit Phasen des selbstständigen Lernens für Lernende und Lehrende das größte Problem darzustellen, eine solche Unterrichtssequenz erfolgreich werden zu lassen. Auch wenn der größte Teil der Schülerinnen und Schüler das selbstständige Arbeiten als positiv ansieht, so gibt es doch Schülerinnen und Schüler, die diese Arbeitsform vehement ablehnen. Sie haben dies bei ihren Rückmeldungen im Fragebogen ausgedrückt und teilweise in den freien Anmerkungen (als letztes Item im Fragebogen) konkret begründet. Dabei wird vor allem mangelnde Betreuung und Begleitung durch die Lehrperson genannt, was als Ursache für den eigenen Leistungsabfall gesehen wird. Dies zeigt, dass die veränderten Anforderungen sowohl für Lernende als auch Lehrende bei einer solchen Unterrichtsgestaltung enorm und nicht zu unterschätzen sind.

Die Lehrperson muss sich auf sehr verschiedene Arbeitsprozesse einstellen, die es zu verfolgen und zu begleiten gilt. Beratung und Ermunterung sind auf verschiedenen Ebenen spontan zu erteilen. Gefragt ist Moderation und Begleitung statt Vortrag und gelenktem Gespräch. Diese Schritte sind deutlich weniger planbar als im traditionellen Unterricht, bei dem zumindest der grobe Gedankengang einer Stunde vorher von der Lehrperson festgelegt und während des Unterrichtsgeschehens gezielt zu beeinflussen ist. Die veränderten Anforderungen für Schülerinnen und Schüler beziehen sich hauptsächlich darauf, dass sie viel stärker angehalten sind, ihren Lernprozess eigenverantwortlich zu gestalten und sich von einer „Konsumhaltung“ zu verabschieden. Um in den eigenen Unterricht Phasen des offenen Lernens zu integrieren, müssen die ersten Schritte dorthin mit Bedacht erfolgen. Der reflektierende Austausch zwischen Lernenden und Lehrenden kann hier einen für alle tragbaren und erfolgreichen Weg sichern helfen. Wichtig ist, dass die verschiedenen Rollen in diesem Prozess und die jeweiligen Verantwortlichkeiten allen Beteiligten klar und transparent sind.

Welche Bedeutung hat der Einsatz von Computeralgebra?

Der Einsatz von Computeralgebra ist für alle Beteiligten – Lehrende wie Lernende – ein wichtiges, unverzichtbares Element der Lernwerkstatt. Er wird nicht nur genutzt zum Visualisieren und Berechnen, sondern vor allem auch zum Verifizieren bzw. Falsifizieren individueller Ideen. Als Beispielgenerator ist er wichtig bei Tätigkeiten des Strukturierens und Analysierens. Zu der insgesamt sehr positiven Sicht von Lehrenden wie Lernenden trägt bei, dass an der Untersuchung nur solche Kurse beteiligt waren, die von vorne herein den freien Zugang zu Computeralgebra für alle Schülerinnen und Schüler zusichern konnten. Dies ist für einen erfolgreichen Einsatz von Computeralgebra unbedingt erforderlich, damit Schülerinnen und Schüler sowie Lehrpersonen mit diesem Medium ausreichend vetraut sind. Bei allen beteiligten Experimentalgruppen war dies der Fall.

11.2 Ausblick

Ausblick auf weitere Forschung

Die Kombination von neuen Unterrichtskonzeptionen und deren wissenschaftlicher Evaluation bietet für Aus- und Fortbildung ein weites Feld an Möglichkeiten. Ganz im Sinne der Design science kann ein Prozess in Gang gesetzt werden, der die Ideen der Lernwerkstatt zu verbreiten hilft – in dem Sinne, dass das vorliegende Material weiter entwickelt wie auch auf andere Themen übertragen wird. Einen solchen Prozess empfehlen Lagrange/Artigue/Laborde/Trouche (2003, S. 256) in ihrer Meta-Studie zu Fragen des Technologieeinsatzes im Unterricht. Sie sprechen von einem „Drei-Takt-Motor“, bei dem drei verschiedene Richtungen ineinander greifen und zusammen wirken müssen:

1. Aufgrund innovativer Ideen entstehen neue Unterrichtssituationen („Innovation“).
2. Vergleichende Studien untersuchen diese Situationen und arbeiten dadurch das besondere Potenzial heraus („Pionierforschung“).
3. Diese Potenziale sind Inhalt weiterer qualitativer Studien, um den Einfluss auf das Lernen besser zu verstehen oder Langzeiteffekte zu untersuchen („Klassische Forschung“).

Die hier vorgestellte Studie kann als Glied in einem solchen Prozess gesehen werden. Allein die Vielfalt der gesammelten Daten reicht als Basis, um weitere Fragen potenzieller Anschlussstudien erörtern zu können. Zum Beispiel:

- Welche markanten Aspekte für den Begriffsbildungsprozess lassen sich bei den individuellen Formulierungen in den Schülerheften erkennen?

- Welche prinzipiellen Arbeitsweisen sind im Umgang mit Computeralgebra zu beobachten? Können zum Beispiel die fünf prinzipiellen Arbeitsweisen von Schülerinnen und Schülern verifiziert werden, die Guin/Trouche (2002) beim Arbeiten mit Computeralgebra beobachten und klassifizieren konnten – theoriegeleitete, rationale, zufallsorientierte, rechnergeleitete und vielseitige Arbeitsweise?

- Welche Strategien nutzen Schülerinnen und Schüler, wenn sie Fehlvorstellungen bei sich selbst oder bei Mitschülerinnen und Mitschülern wahrnehmen?

Darüber hinaus ergeben sich weitere Fragen, die allerdings weitere Datenerhebungen und weitere Forschungsinstrumente benötigen würden.

Mit einer Langzeitstudie könnte man die Frage der Nachhaltigkeit des Gelernten auch über einen längeren Zeitraum (zum Beispiel von einem Jahr) festigen.

Die erkannten Notwendigkeiten und Hindernisse bei der Akzeptanz offenen Unterrichts werfen die Frage auf, wie Lehrpersonen auf die komplexen Anforderungen eines offenen, rechnerintegrierten Mathematikunterrichts adäquat vorbereitet werden können. So wie bei der Entwicklung von Unterrichtskonzeptionen stets Thema, Medium und Unterrichtsmethode als Einheit bedacht werden müssen, sollte diese vernetzte Sichtweise auch im Rahmen von Aus- und Fortbildung tragend sein, um neue Wege in der Synopse von thematischen Schwerpunkten, veränderten Unterrichtsformen und medialer Unterstützung anzuregen. Kern einer entsprechenden Forschung wäre dann die Frage, inwieweit exemplarische Wege wie die Lernwerkstatt gegenwärtigen und zukünftigen Lehrpersonen helfen können, den eigenen Unterricht zu reflektieren und bewusst weiter zu entwickeln. Auch hier wären Aspekte der Nachhaltigkeit von großem Interesse. Die Forderung nach einer Aus- und Fortbildung, die nicht monolithisch einen Teilaspekt von Unterricht (z.B. den Rechnereinsatz) fokussiert, formuliert auch Burrill (2002) im Bericht zur Meta-Studie über Fragen des Einsatzes von „Handheld Graphing Technology in Secondary Mathematics“. Darin heißt es:

> *The findings indicate that simply providing teachers with information about how the technology functions is not likely to result in effective integration in the classroom. Substantial professional development and support is necessary for teachers to make informed decisions about how to best use handheld technology in their classrooms.* ([Burrill 2002], S. i)

Weiterentwicklung der Unterrichtskonzeption

Im Rahmen des Forschungsprojektes war es wichtig, dass die Unterrichtsmaterialien für alle Lehrpersonen einheitlich zu Grunde gelegt wurden. Jedoch würde eine Konzeption, die der einzelnen Lehrperson mehr Freiraum zur eigenen Gestaltung lässt, besser zum Grundanspruch von offenem Unterricht passen. Das, was den Schülerinnen und Schülern gewährt wird – sich selbstständig einen Weg durch das Material zu wählen – müsste auch in ähnlicher Weise Lehrpersonen eröffnet werden. Dazu wäre das Unterrichtsmaterial angemessen weiter zu entwickeln. Statt starrer, fest umrissener Lehrer- und Schülerhefte wären einzelne Module sinnvoll, aus denen sich jede Lehrperson indivdiuell ein passendes Unterrichtsarrangement zusammenstellen kann. Dadurch ergäbe sich auch die Möglichkeit, das Angebot um weitere inhaltliche Aspekte zu erweitern, so dass individuelle Schwerpunkte sich im Unterricht setzen lassen.

Eine solche Form der bewussten Endgestaltung durch die jeweilige Lehrperson würde auch dazu beitragen, dass die Lehrperson selbst den Weg noch intensiver durchdrungen hat und eventuell stärker überzeugt ist. Diese Überzeugung der Lehrperson vom eingeschlagenen Weg ist ein entscheidender Faktor, ob der Unterricht erfolgreich ist oder nicht.

Ein modularer Aufbau könnte auch helfen, den Unterricht vor und nach der Lernwerkstatt zu gestalten. So wäre ein zusätzlicher Baustein zum Einstieg in den Ableitungsbegriff eine sinnvolle Ergänzung. Dabei sollten verschiedene Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff (z.B. lineare Approximation, lokale Änderungsrate) einbezogen und der Anwendungsbezug verstärkt integriert werden. Im aktuellen Arrangement beschränkt sich der Anwendungsbezug lediglich auf die Rahmung und einzelne Teilaspekte der Lernwerkstatt. Ein möglicher Weg der Hinführung zum Ableitungsbegriff wären auch die von Hußmann (2003) vorgeschlagenen intentionalen Probleme zur Differentialrechnung.

Insgesamt hat die Studie gezeigt, dass der vorstrukturierte Weg einer Lernwerkstatt das Potenzial bietet, dass klare inhaltliche Ziele, konstruktivistische Ansprüche von Selbstlernphasen und Integration von Computeralgebra keine disparaten Anforderungen darstellen, sondern vielmehr als Gesamtheit in Einklang zu bringen sind. Dieses Gefüge bietet darüberhinaus den Vorzug, dass Schülerinnen und Schüler kognitive Tätigkeiten auf verschiedenen Ebenen vollziehen, um Mathematik in vielfältiger Weise zu betreiben. Vor allem hilft eine solche Lernwerkstatt Lehrerinnen und Lehrern, Erfahrungen mit Phasen offenen, rechnerintegrierten Unterrichtens zu sammeln, um so den eigenen Handlungsspielraum im Unterricht zu erweitern.

Literaturverzeichnis

[Aebli 1993] AEBLI, HANS (1993). *Denken, das Ordnen des Tuns - Band 1: Kognitive Aspekte der Handlungstheorie.* Stuttgart: Klett-Cotta

[Artelt 2000] ARTELT, CORDULA (2000). *Strategisches Lernen.* Münster: Waxmann

[Artigue 2002] ARTIGUE, MICHÈLE (2002). *Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialects between technical and conceptual work.* In: International Journal of Computers for Mathematical Learning. 7(3), S. 245 – 274

[Atkinson/Shiffrin 1968] ATKINSON, R.C.; SHIFFRIN, R.M. (1968). *Human memory. A proposed system and its control processes.* In: Spence, K.; Spence, J. (Eds): The Psychology of Learning and Motivation. Vol2. New York: Academic Press

[Ausubel 1906] AUSUBEL, DAVID P. (1906). *The use of advance organizers in the learning and retention of meaningful verbal material.* In: Journal of Educational Psychology, 51, S. 267 – 272

[Baacke 1996] BAACKE, DIETER (1996). *Medienkompetenz als Netzwerk – Reichweite und Fokussierung eines Begriffs, der Konjunktur hat.* In: medien praktisch 2/96, S.4 – 10

[Backhaus 2000] BACKHAUS, KLAUS/ ERICHSON, BERND/ PLINKE, WULFF/ WEIBER, ROLF (2000). *Multivariate Analysemethoden – Eine anwendungsorientierte Einführung.* Berlin Heidelberg New York: Springer

[Barzel 1991] BARZEL, BÄRBEL (1991). *Taylorreihenentwicklung mit Derive.* MbU Heft 6/1991. Aachen: Bergmoser und Höller

[Barzel 1992] BARZEL, BÄRBEL (1992). *Taylor Series Expansions.* In: Böhm, J. (Hrsg.): Teaching mathematics with Derive. Lund: Chartwell-Bratt, S.52ff

[Barzel 2000] BARZEL, BÄRBEL (Hrsg.) (2000). *Anders unterrichten – aber wie?.* Mathematik Lehren 110. Seelze: Friedrich-Verlag

[Barzel 2001] BARZEL, BÄRBEL (2001). *Bilder schaffen mit Graphen.* In: Mathematik Lehren 102, S.12 – 15

[Barzel/Fröhlich/Stachniss-Carp 2003] BARZEL, BÄRBEL/ FRÖHLICH, INES/ STACHNISS-CARP, SIBYLLE(2003). *Das ABC der ganzrationalen Funktionen, Schülerheft und Lehrerheft.* Stuttgart: Klett

[Barzel/Hußmann/Leuders 2005] BARZEL, BÄRBEL; HUSSMANN, STEPHAN; LEUDERS, TIMO (2005). *Computer, Internet und co. im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen

[Barzel/Möller 2001] BARZEL, BÄRBEL/ MÖLLER, REGINA (2001). *About the use of the TI-92 for an Open Learning Approach to power Functions. A Teaching Study.* In: ZDM Vol. 33(1), S.1 – 5

[Barzel/von Saint-George 2001] BARZEL, BÄRBEL/ VON SAINT-GEORGE, GUIDO (2001). *Unterricht morgen – Strukturen, Lernumgebungen, Medien.* In: Amelung/Barzel/Berntzen (Hg.), Reflexionen und Visionen eines technologiegestützten Mathematikunterrichts, Tagungsband T^3 Winterakademie, ZKL-Texte Nr. 17, Münster: ZKL

[Barzel/von Saint-George 2003] BARZEL, BÄRBEL/ VON SAINT-GEORGE, GUIDO (2003). *Organisationsformen des Lernens mit neuen Medien.* In: Leuders, T.: Mathematikdidaktik – Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen

[Barzel/von Saint-George/ Weller 2000] BARZEL, BÄRBEL/ VON SAINT-GEORGE, GUIDO/ WELLER, HUBERT (2000). *Anregungen zum selbstständigen Lernen.* In: Amelung (Hg.), Neues Lernen mit neuen Medien - Mathematikunterricht der Zukunft, Tagungsband T^3 Pfingsttagung 1999, ZKL-Texte Nr. 8, Münster: ZKL

[Baum u.a. 2000] BAUM, MANFRED; RIEMER, WOLFGANG; SCHERMULY, HARTMUT; STARK, JÖRG; WEIDIG, INGO; ZIMMERMANN, PETER (2000) *Lambacher Schweizer – Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium Ausgabe NRW 11.* Stuttgart: Klett.

[Blankertz 1974] BLANKERTZ, H. (1974) *Theorien und Modelle der Didaktik.* 8. Aufl., München: Juventa.

[Blomhøj 2001] BLOMHØJ (2001) *Vilkår för lärandet i en computerbasert matematikundervisning – tretyper av elevvirksamhet.* In Grevholm,B. (ed.), Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv. Stockholm: Studentlitteratur. S. 21 – 47

[Blum 1985] BLUM, WERNER (1985). *Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion.* In: Mathematische Semesterberichte, 32, S. 195 – 232

[Blum 2000] BLUM, WERNER (2000). *Perspektiven für den Analysisunterricht.* In: Der Mathematikunterricht 46 (4-5), S. 5 – 17

[Blum/Törner 1983] BLUM, WERNER/ TÖRNER, GÜNTHER (1983). *Didaktik der Analysis.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht

[Blum/Wiegand 2000] BLUM, WERNER/ WIEGAND, BERND (2000). *Offene Aufgaben - wie und wozu?*. In: Mathematik Lehren 100, S. 52 – 55

[Blumstengel 1998] BLUMSTENGEL, ASTRID (1998). *Entwicklung hypermedialer Lernsysteme*. Berlin: Wissenschaftlicher Verlag

[BMBF 2005] BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG UND FORSCHUNG (2005). *IT-Ausstattung der allgemeinbildenden und berufsbildenden Schulen in Deutschland – Bestandsaufnahme 2005 und Entwicklung 2001 bis 2005*. Bonn, Berlin 2005

[Böhm 1992] BÖHM, JOSEF (ed.) (1992). *Teaching mathematics with Derive*. Lund: Chartwell-Bratt

[Bönsch 2000] BÖNSCH, MANFRED (2000). *Lernwerkstätten. Anregungsstrukturen und Lernmöglichkeiten*. In: Förderschulmagazin (2000) 1. S. 5 – 9

[Borromeo-Ferri 2002] BORROMEO-FERRI, RITA (2002). *Erste Ergebnisse einer empirischen Studie zu mathematischen Denkstilen von Schülerinnen und Schülern der 9. und 10. Klasse*. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2002. Hildesheim: Franzbecker, S. 123 – 126

[Borneleit/Danckwerts/Henn/Weigand 2001] BORNELEIT, PETER; DANCKWERTS, ROLF; HENN, HANS-WOLFGANG; WEIGAND, HANS-GEORG (2001). *Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe*. In: JMD 22 (1), S.73 – 90

[Brockhaus 1996-99] *Brockhaus - Die Enzyklopädie in 24 Bänden*. 20., neu bearbeitete Auflage. Leipzig, Mannheim: F.A. Brockhaus

[Bromme/Steinbring 1990] BROMME, R.; STEINBRING, HEINZ (1990). *Die epistemologische Struktur mathematischen Wissens im Unterrichtsprozeß. Eine empirische Analyse von vier Unterrichtsstunden in der Sekundarstufe I*. In: Bromme, R.; Seeger, F.; Steinbring, H.:Aufgaben als Anforderung an Lehrer und Schüler. Köln: Aulis. S. 151 – 229

[Bruner 1974] BRUNER, JEROME (1974) *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Berlin Verlag, Pädagogischer Verlag Schwann 1974

[Buchberger 1989] BUCHBERGER, BRUNO (1989) *Why Should Students Learn Integration Rules?* In: RISC- Linz Technical Report No. 89-7.0, Johannes Kepler University Linz, Österreich.

[Bürger/Malle 2000] BÜRGER, HEINRICH; MALLE, GÜNTER (2000). *Funktionsuntersuchungen mit Differentialrechnung*. In: Mathematik lehren 103, S. 56 – 59

[Bühl/Zöfel 2002] BÜHL, ACHIM/ ZÖFEL, PETER (2000). *SPSS-Einführung in die moderne Datenanalyse unter Windows*. München: Pearson Studium

[Burkhardt 1981] BURKHARDT, HUGH *The real world and mathematics*. Glasgow: Blackie.

[Burrill 2002] Burrill, Gail et al. (2002). *Handheld Graphing Technology in Secondary Mathematics: Research Findings and Implications for Classroom Practice – Report prepared through a grant to Michigan State University.* Dallas: Texas Instruments.

[Chacon/Soto-Johnson 1998] Chacon, Paul; Soto-Johnson, Hortensia *The effect of CAI in College Algebra incorporating both drill and exploration.* In: the International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education. S.201 – 216

[Chevallard 1999] Chevallard, Yves (1999) *L´analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique.* In: Recherche en Didactique des Mathématiques 19(2). S. 221 – 266

[Christmann/Groeben 1999] Christmann, Ursula; Norbert Groeben (1999). *Psychologie des Lesens.* In: Franzmann, Bodo (Hrsg). Handbuch Lesen. München: Saur, S.145 – 223

[Connors/Snook 2001] Connors; Snook (2001). *The effects of hand-held CAS on student achievement in a first year college core calculus sequence.* In: The International Jopurnal of Computer Algebra in Mathematics Education, 8(2), S. 99 – 114

[Coston 1994] Coston, Yvonne (1994). *The effects of graphics calculator-enhanced instruction, and cooperative learning on college algebra students´ understanding of eth function concept, achievement of algebraic skliss, and attitudes towards mathematics.* North Carolina State University at Raleigh. Vol. 55/08-A of dissertation abstracts international. Page 2310.

[Danckwerts/Vogel 1992] , Danckwerts, Rainer; Vogel, Dankwart (1986). *Analysis für den Leistungskurs.* Stuttgart: Metzler

[Danckwerts/Vogel 1992] , Danckwerts, Rainer; Vogel, Dankwart (1992). *Quo vadis, Analysisunterricht?.* In: Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht 45(6), S. 370-374

[Deci/Ryan 1993] Deci, E. L.; Ryan, R. M. (1993). *Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik.* In: Zeitschrift für Pädagogik, 39, S. 223 – 238.

[De Saussure 2001] De Saussure, Ferdinand (2001). *Grundfragen der allgemeinen Sprachwissenschaft.* Üb. v. Lommel, H. (Französisches Originalfassung von 1916) Berlin u.a.: de Gruyter

[DMK 2003] DMK – Deutschschweizerische Mathematikkommission: Dzung Wong, Baoswan; Kirchgraber,Urs; Schönenberger-Deuel,Johanna; Zogg,Daniel (2003). *Differenzieren - do it yourself.* Zürich: Orell Füssli.

[Doerr/Zangor 1999] DOERR, HELEN; ZANGOR, ROXANA (1999). *The teacher, the task and the tool: The emergence of classrooms norms.* In: International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 6(4), S. 267 – 279

[Doerr/Zangor 2000] DOERR, HELEN; ZANGOR, ROXANA (2000). *Creating meaning for and with the graphing calculator.* In: Educational Studies in Mathematics, 41, S. 143 – 163

[Diesterweg 1958] DIESTERWEG, ADOLPH (1958). *Wegweiser zur Bildung für deutsche Lehrer.* In: Schriften und Reden. Bd.1. Berlin/ Leipzig:

[Drijvers 1995] DRIJVERS, PAUL (1995). *White-box/black-box revisited.* In: The International Derive Journal 2(1), S. 3 – 4

[Drijvers 2003] DRIJVERS, PAUL (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment – Design research on the understanding of the concept of parameter.* Utrecht: Freudenthal Instiute

[Drijvers/Barzel/Maschietto/Trouche 2006] DRIJVERS, PAUL; BARZEL, BÄRBEL; MASCHIETTO, MICHELA; TROUCHE, LUC (2005). *Tools and technologies in mathematical didactics: Report of CERME4 Working group 9.* In: Bosch, Marianna (ed.): Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Sant Feliu de Guíxols, Spain. http://cerme4.crm.es/

[Drijvers/Doormann 1996] DRIJVERS, PAUL; DOORMANN, MICHIEL(1996). *The graphics calculators in mathematics education.* In: Journal of Mathematical Behavior, 15(4), S. 425 – 440

[Drijvers/Trouche 2005] DRIJVERS, PAUL; TROUCHE, LUC (2005). *From Artifacts to Instruments: A Theoretical Framework Behind the Orchestra Metaphor.* In: Heid, M.K./Blume, G.W. (Eds.): Research on Technology in the Learning and Teaching of Mathematics – Syntheses and Perspectives. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers. S.XXX

[Durkin 1991] DURKIN, KEVIN [HG.] (1991). *Language in mathematical education.* Milton Keynes: Open university Press.

[Forster/Mueller 2001] FORSTER, PRATICIA; MUELLER, UTE (2001). *Outcomes and implications of students´ use of graphics calculators in the public examination of calculus.* In: International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32(1), S.37 – 52

[Frege1969] FREGE, GOTTLOB (1969). *Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht

[Freudenthal 1973] FREUDENTHAL, HANS (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Band 1. Stuttgart: KLett Verlag

[Gray/Tall 1994] GRAY, EDDY; TALL, DAVID (1994). *Dualitiy, Ambiguity and Flexibility: A proceptual View of Simple Arithmetic.* In: Journal for Research in Mathematics Education 26, S. 115 – 141

[Green/Green 2005] GREEN, NORM; GREEN, KATHY (2005). *Kooperatives Lernen im Klassenraum und im Kollegium.* Seelze: Kallmeyer

[Griesel/Postel 1999] GRIESEL, HEINZ; POSTEL, HELMUT (1999). *Elemente der Mathematik 11 – NRW.* Hannover: Schroedel

[Guin/Trouche 1998] GUIN, DOMINIQUE; TROUCHE, LUC (1998). *The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators.* In: International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3(3), S. 195 – 227

[Guin/Trouche 2002] GUIN, DOMINIQUE; TROUCHE, LUC (2002). *Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of intrumental orchestrations*In: ZDM Vol. 34 (5), S. 204 – 211

[Hahn/Prediger 2004] HAHN, STEFFEN; PREDIGER, SUSANNE (2004). *Vorstellungsorientierte Kurvendiskussion – Ein Plädoyer für das Qualitative.* In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2004. Hildesheim: Franzbecker, S. 217 – 220

[Hansen-Schaberg/ Schonig 2002] HANSEN-SCHABERG, INGE; SCHONIG,BRUNO (Hrsg): Freinet-Pädagogik. Band 5 der Reihe Basiswissen Pädagogik – Reformpädagogische Schulkonzepte. Baltmannsweiler: Schneider Verlag

[Harskamp/Suhre/van Streun 1998] HARSKAMP, EGBERT; SUHRE, COR; VAN STREUN, ANNE (1998). *The graphics calculator in mathematics education: An experiment in Netherlands.* In: Hiroshima Journal of Mathematics Education, 6, S. 13 – 31

[Harskamp/Suhre/van Streun 2000] HARSKAMP, EGBERT; SUHRE, COR; VAN STREUN, ANNE (2000). *The graphics caluculator and students´ solution strategies.* In: Mathematics Education Research Journal, 12(1), S. 37 – 52

[Hefendehl-Hebeker 2003] HEFENDEHL-HEBEKER, LISA (2003). *Didaktik der Mathematik als Wissenschaft – Aufgaben, Chancen, Profile.* In: Jahresbericht der DMV 105. Band(2003) 1. S. 3 – 29

[Hefendehl-Hebeker 2004a] HEFENDEHL-HEBEKER, LISA (2004). *Selbstgesteuertes Lernen im Dialog.* In: Der Mathematikunterricht, Jg.50(3), S.45 – 51

[Hefendehl-Hebeker 2004b] HEFENDEHL-HEBEKER, LISA (2004). *Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht.* In: Bayrhuber, H. / Ralle, B. / Reiss, K. / Schön, H. / Vollmer, H. (Hrsg.): Konsequenzen aus PISA - Perspektiven der Fachdidaktiken. Innsbruck: Studienverlag.

[Hennesy/Fung/Scanlon 2001] HENNESSY, SARA; FUNG, PAT; SCANLON, EILEEN (2001). *The role of the graphic calculator in mediating graphing activity.* In: International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32. S.267 – 290

[Hentschel/Pruzina 1995] HENTSCHEL, TORSTEN; PRUZINA, MANFRED (1995). *Graphikfähige Taschenrechner im Mathematikunterricht – Ergebnisse aus einem Schulversuch in Klasse 9/10.* In: JMD 1995 (3/4), S.193 – 232

[Herget/Jahnke/Kroll 2001] HERGET, WILFRIED; JAHNKE, THOMAS; KROLL, WOLFGANG (2001). *Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht.* Berlin: Köhler

[Herget/Keunecke/Malitte/Stachniss-Carp 2001] HERGET, WILFRIED; KEUNECKE, KARL-HEINZ; MALITTE, ELVIRA; STACHNISS-CARP, SIBYLLE (2001). *Sinus-Graphen und Rechner-Grenzen.* In: Amelung, Udo (Hg.): Neues Lernen - Neue Medien - Neuer Blick auf Standardthemen. Pfingsttagung 2000. Zentrale Koordination Lehrerausbildung. ZKL-Texte 15, Westfälische Wilhelms-Universität Münster 2001. S. 165 – 174

[Herget/Keunecke/Malitte/Stachniss-Carp 2002] HERGET, WILFRIED; KEUNECKE, KARL-HEINZ; MALITTE, ELVIRA; STACHNISS-CARP, SIBYLLE (2002). *Sinus-Graphen und Rechner-Grenzen.* In: PM 44 (2). S. 64 – 68

[Herget/Malitte 2002] HERGET, WILFRIED; MALITTE, ELVIRA (2002). *Sinus-Schwächen und Rechner-Grenzen.* In: Herget/ Lehmann (Hg.): Neue Materialien für den Mathematikunterricht. Exponential- und Winkel-Funktionen in der Sekundarstufe 1 mit dem TI-83/-89/-92. Hannover: Schroedel. S. 67 – 64

[Hershkowitz/Kieran 2001] HERSHKOWITZ, RINA; KIERAN, CAROLYN (2001). *Algorithmic and meaningful ways of joining together representatives within the same mathematical activity: an experience with graphing calculators.* In: Van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 1. Utrecht: Freudenthal Institute. S.95 – 107

[Hesse/Wottawa 1997] HESSE, HERMANN-GÜNTER/ WOTTAWA HEINRICH (1997). *Methodische Probleme der Unterrichtsforschung.* In: Weinert, Franz E. (Hrsg.): Enzyklopädie der Psychologie. Göttingen/ Bern/ Toronto/ Seattle: Hogrefe

[Heugl/Klinger/Lechner 1996] HEUGL, HELMUT; KLINGER, WALTER; LECHNER, JOSEF (1996) *Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen – Ein didaktisches Lehrerbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen Derive-Projekt.* Bonn: Addison-Wesley

[Heugl/Kutzler 1994] HEUGL, HELMUT; KUTZLER, BERNHARD (eds.) (1994). *Derive in education*. Lund: Chartwell-Bratt

[Heymann 1996] HEYMANN, HANS WERNER (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Beltz: Weinheim und Basel

[Heymann 1998] HEYMANN, HANS WERNER (1998). *Üben und wiederholen - neu betrachtet*. In: Pädagogik 10/1998, S. 7 – 11.

[Hole 1998] HOLE, VOLKER (1998). *Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer. Methodische und didaktische Grundfragen in der Sekundarstufe I*. Donauwörth: Auer Verlag

[Hong/Toham/Kiernan 2000] HONG,Y. TOHAM, M. KIERNAN, C. (2000). *Supercalculators and university entrance calculus examinations*. In: Mathematics Education Research Journal, 12(3), S. 321 – 336

[Hirlimann 1996] HIRLIMANN, ANNE (1996). *Computer algebra systems in French secondary schools*. In: The International Derive Journal 3(3), S. 1 – 4

[Hischer 1996] HISCHER, HORST (1996). *Begriffs-Bilden und Kalkulieren vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen*. In: Hischer, H.; Weiß, M.: Rechenfertigkeit und Begriffsbildung. Zu wesentlichen Aspekten von Mathematikunterricht vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen. Bericht über die 13. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der GDM vom 22.-25.9.1995. Hildesheim/ Berlin: Franzbecker.

[Hischer 2002] HISCHER, HORST (2002). *Mathematikunterricht und Neue Medien*. Hildesheim/ Berlin: Franzbecker.

[Hüholdt 1993] HÜHOLDT, JÜRGEN (1993). *Wunderland des Lernens*. Bochum 1993

[HughesHallett et al. 1998] HUGHES, HALLETT; GLEASON, ANDREW M. ET AL. *Calculus*. New York: john Wiley and Sons Inc.

[Hußmann 2002] HUSSMANN, STEPHAN (2002).*Konstruktivistisches Lernen an intentionalen Problemen. Mathematik unterrichten in einer offenen Lernumgebung*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

[Hußmann 2003] HUSSMANN, STEPHAN (2003).*Mathematik entdecken und erforschen. Theorie und Praxis des Selbstlernens in der Sekundarstufe II*. Berlin: Cornelsen.

[Hußmann 2003a] HUSSMANN, STEPHAN (2003a).*Umgangssprache – Fachsprache*. In: Leuders, Timo (Hrsg.): Mathematikdidaktik – Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornlesen.

[Jahnke 1995] JAHNKE, HANS NIELS (1995). *Historische Reflexion im Unterricht. Das erste Lehrbuch der Differentialrechnung (Bernoulli 1692) in einer elften Klasse*. In: math.did 18, Bd. 2, S. 30 – 58

[Jahnke 1999] JAHNKE, HANS NIELS [HG.] (1999). *Geschichte der Analysis.* Heidelberg, Berlin: Spektrum.

[Jahnke-Klein 2001] JAHNKE-KLEIN, SYLVIA (2001). *Sinnstiftender Mathematikunterricht für Jungen und Mädchen.* Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

[Jones/Lagrange 2004] JONES, KEITH; LAGRANGE, JEAN-BAPTISTE (2004). *Tools and technologies in mathematical didactics: research findings and future directions.* In: Mariotti, Maria A. (ed.): Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria. http://www.dm.unipi.it/ didattica/CERME3/proceedings/(Stand:24.3.2006)

[Jost 1992] JOST, K.L.E. (1992). *The implementation of technology in the calculus classroom: An examination of teacher beliefs, practice and curriculum change.* Syracuse University, Unpublished PhD. Dissertation Abstracts International; 49/06 1397. Hier zitiert nach: kst02

[Jungwirth 1992] JUNGWIRTH, HELGA (1992). *Computer und Geschlecht - eine mikroethnographische Analyse von Denk- und Handlungsgewohnheiten bei der Nutzung des Computers im Unterricht.* In: Österreichisches Bundesministerium für Unterricht Kultus und Sport (Hrsg.): Mädchen, Buben und Computer. Reihe Frauenforschung Bd. 2, Wien: 1992, S. 15 - 114.

[Jungwirth 1994] JUNGWIRTH, HELGA (1994). *Mädchen und Buben im Computerunterricht?, Beobachtungen und Erklärungen.* In ZDM (26) 1994, Heft 2, S. 41 - 48.

[Jungwirth 2004] JUNGWIRTH, HELGA (2004). *Veränderung und Reproduktion des Gewöhnlichen: Lehrerpraktiken in Neuerungskontexten.* In: JMD 25 (2). S. 87 – 111.

[Kaiser 1995] KAISER, GABRIELE (1995). *Realistätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion.* In: Graumann,G.; Jahnke, Th.; Kaiser, G.; Meyer, J. (Hg.): Materialien fpür einen realistätsbezogenen Mathematikunterricht. Band 2. Hildesheim: Verlag Franzbecker. S. 66 – 84

[Kastberg/Leatham 2005] KASTBERG, SIGNE; LEATHAM, KEITH (2005). *Research on Graphing Calculators at the Secondary Level: Implications for Mathematics Teacher Education.* In: Contemporary Issues in Technology and Teacher Education 5(1). S. 25-37.

[Keller/Hirsch 1998] KELLER, BRIAN; HIRSCH, CHRISTIAN (1998). *Student preferences for representations of functions.* In: International Journal of Mathematics Education in Science and Technology. 6: S. 191-207

[Keller/Russell/Thompson 1999] Keller, Brian; Russell, Chris; Thompson, Heather (1999). *A Large-scale Study Clarifying the Roles of the TI-92 and Instructional Format on Student Success in Calculus.* - In: The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education 6(3). 191-207

[Kendal/Stacey 2002] Kendal, Margaret; Stacey, Kaye (2002). *Teachers in transition: Moving towards CAS-supported classrooms.* In: ZdM 2002 Vol.34(5). 196 – 203

[Klein 1968] Klein, Felix (1968). *Elememtarmathematik vom höheren Standpunkt aus, 1.Bd.*. Berlin: Springer (Nachdruck der 1. Auflage von 1908)

[Kleist 1805] Kleist, Heinrich von. *Über die allmähliche Verfertigung der Gedanken beim Reden.* Quelle: gutenberg.spiegel.de/kleist/erzaehlg/gedanken.htm (Stand: 20.2.2006)

[Klika 2003] Klika, Manfred (2003).*Zentrale Ideen - echte Hilfen.* In: Mathematik lehren 119. S.4

[Klimsa/Issing 2002] Klimsa, Paul; Issing, Ludwig J. (2002) (Hrsg.): *Information und Lernen mit Multimedia und Internet.* Weinheim: Psychologie Verlags Union.

[Klippert 2000] Klippert, Heinz (2000). *Teamentwicklung im Klassenraum.* Weinheim: Beltz

[KMK 2002] Kultusministerkonferenz (2002). *Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik* – Beschluss der Kultusmionisterkonferenz(KMK) vom 1.12.1989 (www.kmk.org)

[KMK 2003] Kultusministerkonferenz (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Abschluss* (www.kmk.org).

[Krainer 2002] Krainer, Konrad (2002). *Reflexion und Vernetzung als Impulse zur Förderung von Innovationen.* In: K.Krainer et al. (Hg.) Lernen im Aufbruch: Mathematik und Naturwissenschaften. Innsbruck/ Wien/ München/ Bozen: Studienverlag, 21 – 57.

[Krummheuer/Schreiber 2005] Krummheuer, Götz; Schreiber, Christof (2005) *Abschlussbericht zum Projekt „Inskriptionen im Mathematikunterricht der Grundschule“, gefördert durch die Müller-Reitz-Stiftung im Deutschen Stifterverband Az.: T009/12254/02.* Frankfurt: Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, Institut für Didaktik der Mathematik

[Kutzler 1995] Kutzler, Bernhard (1995). *Mathematik unterrichten mit Derive - Ein Leitfaden für Lehrer.* Bonn, Paris, u.a.: Addison Wesley

[Lagrange 2004] LAGRANGE, JEAN-BAPTISTE(2004). *Analysing the impact of ICT on mathematics teaching practices.* In: Mariotti, Maria A. (ed.): Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria. http://www.dm.unipi.it/ didattica/CERME3/proceedings

[Lagrange 2005] LAGRANGE, JEAN-BAPTISTE(2005). *Transposing computer tools from the Mathematical Sciences into teaching..* In: Guin/ Ruthven/ Trouche: The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument. New York: Springer. S. 67 – 82

[Lagrange/Artigue/Laborde/Trouche 2003] LAGRANGE, JEAN-BAPTISTE; ARTIGUE, MICHÈLE; LABORDE, COLETTE; TROUCHE, LUC. *Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation.* In: A. Bishop, M.A. Clements, Ch. Keitel, J. Kilpatrick, F. Leiung (eds.): 2nd International Handbook of Mathematics Education, Part One. Dordrecht:Kluwer Acandemic Publishers. S. 238 – 259

[Lambert 2003] (2003). LAMBERT, ANSELM. *Begriffsbildung im Mathematikunterricht.* Preprint No.77 des FB 6.1. Mathematik der Universität des Saarlandes, Saarbrücken

[Lambert 2005] (2005). LAMBERT, ANSELM. *Ich sehe was, was du nicht siehst – Computerdarstellungen reflektieren.* In: Barzel,B.; Hußmann, St.; Leuders, T. (2005): Computer, Internet und co im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor

[Lehmann 2001] (2001). LEHMANN, EBERHARD. *Gleichungen mit dem TI-92* Hannover: Schroedel

[Leuders 2001] LEUDERS, TIMO (2001).*Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II.* Berlin: Cornelsen

[Malle 2000] MALLE, GÜNTHER (2000) (Hrsg.) *Funktionen untersuchen.* Mathematik lehren 103. Seelze: Friedrich Verlag

[Mamona-Downs 1990] MAMONA-DOWNS, J. (1990) *'Pupils' interpretation of the limit concept; a comparison study between Greeks and English'.* In: Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, México, 1, S. 69 – 75.

[Maturana/Varela 1987] MATURANA, HUMBERTO; VARELA, FRANCISCO (1987). *Der Baum der Erkenntnis.* Bern/ München/ Wien: Scherz

[Meyer 2004] MEYER, HILBERT U.A. (2004). *Merkmale guten Unterrichts.* Oldenburg: Didaktisches Zentrum.

[Mielke 2001] MIELKE, ROSEMARIE (2001). *Psychologie des Lernens.* Stuttgart: Kohlhammer Urban

[Mittelstraß 1996] Mittelstrass, Jürgen (Hg.) (1996). . In: Enzyklopädie für Philosophie und Wissenschaftstheorie. Bd. 4. Stuttgart: Metzler

[Monoghan 2005] Monoghan, John (2005). *Computer algebra, instrumentation and the anthropological approach.* Proceedings der Tagung CAME4, Oktober 2005. Am 21.9.2005 entnommen von: www.lonklab.ac.uk/came/events/CAME4

[MSWF 2001] Ministerium für Schule, Wissenschaft und Forschung des Landes NRW (Hrsg.) (2001). *Mathematikunterricht mit CAS.* Schriftenreihe Schule in NRW Br. 9035/3 Frechen: Ritterbach

[Müller/Steinbring/Wittmann 1997] Müller, Gerhard N.; Steinbring, Heinz; Wittmann, Erich CH. (1997) *10 Jahre „mathe 2000“ – Bilanz und Perspektiven.* Düsseldorf: Klett

[Münzinger/Voigt 1988] Münzinger, Wolfgang; Voigt, Jörg (1988). *Routine und Reflexion – Fachspezifische Kommunikationsanalysen in der Lehrerfortbildung.* In: Die Deutsche Schule 80/1988, 3, S. 351 – 369

[Naujok 2000] Naujok, Natascha (2000). *Schülerkooperationen im Rahmen von Wochenplanunterricht.* Weinheim: Deutscher Studienverlag.

[Neubert 2004] Neubert, Stefan (2004). *Eine Einführung in die thematische Vielfalt von Deweys Philosophie und ihrer heutigen Rezeption.* http://www.uni-koeln.de/ew-fak/paedagogik/dewey/werke/einfuehrung.pdf (Stand: 9.11.2005)

[Niederdrenk-Felgner 1993] Niederdrenk-Felgner, Cornelia (1993). *Computer im koedukativen Unterricht.* Studienbrief des Projekts Mädchen und Computer. Tübingen: DIFF 1993.

[Niederdrenk-Felgner 1994] Niederdrenk-Felgner, Cornelia (1994). *Mathematikunterricht für Mädchen - was kann das sein ?.* In: ZDM Vol. 26(2).

[NLI 2001] Niedersächsisches Landesinstitut für Fortbildung und Weiterbildung im Schulwesen und Medienpädagogik (Hrsg.) *Computeralgebrasysteme im Mathematikunterricht der SEkundartsufe II* NLI-Berichte 64. Hildesheim: NLI

[Nocker 1996] Nocker, Robert (1996). *Der Einfluss von Computeralgebrasystemen auf die Unterrichtsmethoden und die Schüleraktivitäten.* In BzM 1996, S.325ff

[Noss/Hoyles 1996] Noss, Richard; Hoyles, Celia (1996). *Windows in mathematical meaning: learning cultures and computers.* - London: Kluwer Academic Publishers

[Ogden/Richards 1923] Ogden, Charles Kay; Richards, Ivor Armstrong (1923). *The meaning of meaning.* London: Routledge & Kegan

[Pallack 2003] PALLACK, ANDREAS (2003). *Zur Integration von Lehr- Lernprogrammen in den Mathematikunterricht* In: P. Bender, W. Herget, H.-G. Weigand, Th. Weth (Hrsg): Lehr– und Lernprogramme für den Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker Verlag. S. 133-142.

[Pallasch/Reimers 1997] PALLASCH, W./ REIMERS, H. (1997). *Pädagogische Werkstattarbeit. Eine pädagogisch-didaktische Konzeption zur Belebung der traditionellen Lernkultur.* Weinheim/ München: Juventa

[Parkhurst 1922] PARKHURST, HELEN (1922). *Education on the Dalton Plan.* New York: E.P.Dutton und Company

[PISA 2000] (Hrsg.) Schülerleistungen im internationalen Vergleich. Eine neue Rahmenkonzeption für die Erfassung von Wissen und Fähigkeiten. Deutsche Übersetzung 2000.

[Polya 1949] POLYA, GEORGE (1949). *Schule des Denkens.* Tübingen: Francke.

[Popp 1995] POPP, SUSANNE (1995). *Der Daltonplan in Theorie und Praxis. Ein aktuelles reformpädagogisches Modell zur Förderung selbständigen Lernens in der Sekundarstufe.* Bad Heilbrunn: Klinkhardt

[Reinmann-Rothmeier/Mandl/Prenzel 1994] REINMANN-ROTHMEIER, GABI; MANDL, HEINZ; PRENZL, MANFRED. *Computerunterstützte Lernumgebungen: Planung, Gestaltung und Bewertung.* Erlangen: Publicis-MCD-Verlag

[Ruf/Gallin 1998] RUF, URS/ GALLIN, PETER (1998). *Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz.* Seelze: Kallmeyer.

[Ruthven 1990] RUTHVEN, KENNETH (1990). *The influence of grahic calculator use on translation from graphic to symbolic form.* In: Educational STudies in Mathematics, 21(5), S.431-450

[Saar 1992] SAAR, HANS (1992). *Zu einigen Zusammenhängen von Gruppenarbeit und unterrichtlichem Üben.* In: Hesse, Horst (Hrsg). Kommunikation und Unterricht. Bd.3. Baltmannsweiler: Schneider Verl. Hohengehren. S. 65 – 69

[Schlöglmann 2005] SCHLÖGLMANN, WOLFGANG (2005). *Routinen.* In: JMD 2005.

[Schmidt 1988] SCHMIDT, GÜNTHER (1988). *Computer im Mathematikunterricht.* In: Der MU 34 (4), S.17ff

[Schneider 2000] SCHNEIDER, EDITH (2000). *Einstieg in die Differentialrechnung mit CAS* In: ML 102, S. 40 – 43

[Schwank 1996] SCHWANK, INGE (1996). *Zur Konzeption prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung.* In: ZDM-Analysenheft „Deutsche psychologische Forschung in der Mathematikdidaktik“. ZDM Vol. 6. S. 168 – 183

[Schwarz/Hershkowitz 1999] SCHWARZ, B; HERSHKOWITZ, R (1999). *Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools.* In: Journal for Research in Mathematics Education: 30(4), S. 362-389

[Schubring 1978] SCHUBRING, GERT (1978). *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik.* Stuttgart: Klett

[Schupp 1994] SCHUPP, HANS Der Satz fiel im Rahmen einer Arbeitsgruppe, s.: Hischer (Hg.) Tagungband der 11. Arbeitstagung des GDM-Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ 1993. Hildesheim: Franzbecker. S.70

[Sfard 1992] SFARD, ANNA (1992). *Operational origins of mathematical objects and the quandry of reification – the case of function.* In: Harel, G./ Dubinsky, E. (eds.), The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes 25, Washington DC: MAA. S.59 – 84

[Sierpinska 1990] SIERPINSKA, ANNA (1992). *Theoretical perspectives for development of the function concept.* In: Harel, G./ Dubinsky, E. (eds.), The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes 25, Washington DC: MAA. S. 23 – 58)

[Simon 1990] SIMON, HERBERT [Übers. von Oswald Wiener unter Mitw. von Una Wiener] (1990). *Die Wissenschaften vom Künstlichen.* Computerkultur – Band 3. Berlin: Kammerer und Unverzagt

[Sjuts 2003] SJUTS, JOHANN (2003). *Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag.* In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jg 24, Heft 1/2003, S.18 – 40

[Spitzer 2002] SPITZER, MANFRED (2002). *Lernen: Gehirnforschung und die Schule des Lebens.* Heidelberg/ Berlin: Spektrum Akademischer Verlag

[Steinbring 1998] STEINBRING, HEINZ (1998). *Mathematikdidaktik: Die Erforschung theoretischen Wissens in sozialen Kontexten des Lernens und Lehrens.* In: ZDM 98/5. S. 161 – 167

[Steinbring 2005] STEINBRING, HEINZ (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction.* New York: Springer

[Steiner 1991] STEINER, G. (1991). *Mathematisches Denken unter der Lupe: Methodologische Überlegungen über das Erfassen mathematischer Denkschritte.* In: Gerhard, U. (Hrsg). Psychologie zwischen Anthropologie und Empirie: Festschrift zum 60. Geburtstag von Victor Hobi. Bern: Huber

[Stern 1997] STERN, ELSBETH (1997). *Mathematik.* In: Weinert, Franz E. (Hrsg): Enzyklopädie der Psychologie. Göttingen/ Bern/ Toronto/ Seattle: Hogrefe.

[Strauss/Corbin 1996] STRAUSS, ANSELM; CORBIN, JULIET (1996). *Grounded theory - Grundlagen qualitativer Sozialforschung.* Weinheim: Beltz, Psychologie Verlags Union.

[Tall 1997] TALL, DAVID (1997). *Functions and Calculus.* In: Bishop. A. J. et al (Eds.). International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer. S.289-325

[Thiel 2003] THIEL, PETER (2003). *Der Daltonplan – a way of life?.* In: Akzente 2003(7). www.vlb-bayern.de/akzente.htm (Stand: 3.11.2005)

[Törner 2002] TÖRNER, GÜNTER (2002). *Epistemologische Grundüberzeugungen - verborgene Variablen beim Lehren und Lernen von Mathematik.* In: Der Mathematikunterricht 48, Heft 4/5, 106 - 130.

[Tietze/Klika/Wolpers 1997] TIETZE, UWE-PETER; KLIKA, MANFRED; WOLPERS, HANS (1997). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Bd.1: Fachdidaktische Grundfragen Didaktik der Analysis.* Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

[Trouche 2005] TROUCHE, LUC (2005). *Calculators in Mathematic Education: A rapid evolution of tools, with differential effects.* In: Guin/ Ruthven/ Trouche (Eds.). The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational devoce into a mathematical instrument. Dordrecht: Kluwer. S. 11 – 41

[Tschacher 2000] TSCHACHER, KAREL (2000). *Bericht zur Arbeitsgruppe „Neue Aufgabenkultur, veränderte Lehrerrolle und Unterrichtspraxis“.* In: Herget,W./ Weigand; H-W.; Weth, Th.: Standardthemen des Mathematikunterrichts in moderner Sicht. Hildesheim: Franzbecker 2000

[Vérillon/Rabardel 1995] VÉRILLON, PIERRE; RABARDEL, PIERRE (1995). *Cognition and artefacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity.* In: European Journal of Psychology of Education, 10, S. 77 – 103

[Vester 2001] VESTER, FREDERIC (2001). *Denken, Lernen, Vergessen.* München: dtv

[Vinner 1983] VINNER, SHLOMO (1983). *Concept definition, concept image and the notion of function.* In: The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 14, S. 293 – 305

[Voigt 1984] VOIGT, JÖRG (1984). *Die Kluft zwischen didaktischen Maximen und ihrer Verwirklichung im Mathematikunterricht – dargestellt an einer Szene aus dem alltäglichen Mathematikunterricht.* In: Journal für Mathematikdidaktik 5. S. 265 – 283

[Voigt 1984a] VOIGT, JÖRG (1984). *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen.* Weinheim: Beltz

[Vollrath 1994] VOLLRATH, H.-J. (1994). *Algebra in der Sekundarstufe*. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.

[vom Hofe 1995] VOM HOFE, RUDOLF (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum-Verlag.

[Vygotskij 1978] VYGOTSKIJ, LEV (1978). *Mind in Society*. London: Harvard University Press

[Wagenschein 1983] WAGENSCHEIN, MARTIN (1983). *Erinnerungen für morgen*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag

[Weber 1998] WEBER, ANDERS (1998) *Was ist Werkstattunterricht?*. Mülheim: Verlag An der Ruhr

[Weidenmann 2004] WEIDENMANN, BERND (2004^4). *Erfolgreiche Kurse und Seminare*. Weinheim/ Basel: Beltz

[Weigand/Weth 2002] WEIGAND, HANS-GEORG; WETH, THOMAS (2002). *Computer im Mathematikunterricht*. Heidelberg/ Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

[Weinert/Helmke 1997] WEINERT, FRANZ/HELMKE, ANDREAS (1997). *Entwicklung im Grundschulalter*. Weinheim: Beltz/Psychologie Verlags Uniom.

[Whitehead 1962] WHITEHEAD, ALFRED (1962). *Die Gegenstände des mathematischen Unterrichts* – Deutsche Übersetzung der Erstveröffentlichung 1913. In: Neue Sammlung 2. S. 257 – 266

[Wiechmann 2000] WIECHMANN (2000).*Zwölf Unterrichtsmethoden. Vielfalt für die Praxis*. Weinheim, Basel: Beltz.

[Winter 1995] WINTER, HEINRICH (1995). *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung*. In: Mitteilungen der GDM 61.

[Wittmann 1981] WITTMANN, ERICH (1981) *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg

[Wittmann 1997] WITTMANN, ERICH (1997) *Das Projekt „mathe 2000“ - Modell für fachdidaktische Entwicklungsforschung*. In: G.N. Müller / H. Steinbring / E.Ch. Wittmann (Hg.), 10 Jahre „mathe 2000“, Bilanz und Perspektiven. Leipzig/Düsseldorf: Klett; S. 41 – 65

[Zöfel 2002] ZÖFEL, PETER (2002). *Statistik verstehen - Ein Begleitbuch zur computerunterstützten Anwendung*. München: Addison-Wesley

Anhang

Teil IV

Anhang

Anhang A

Materialien aus dem Lehrerbegleitheft

Zur Bewertung der Arbeit im Rahmen der Lernwerkstatt

Im Lehrerheft befindet sich ein Klausurvorschlag für die schriftlichen Bewertung (s. Seite 274) nach der Lernwerkstatt. Als Vorbereitung dazu kann eine schriftliche Lernkontrolle dienen, zu der es ebenfalls im Lehrerheft ein Beispiel gibt (s. Seite 273).

Die mündliche Beurteilung sollte sich aus verschiedenen Aspekte zusammensetzen. Dazu gehören:

- die allgemeinen Beobachtungen der Lehrperson,
- (evtl.) Prüfungsgespräche mit der Gruppe während der normalen Gruppenarbeitszeit
- evtl. den Lernkontrollen
- der Abschlusspräsentation (Dabei sollte neben der Schlüssigkeit und Korrektheit ein eventuell erstelltes Plakat und die Art des Vortrages mit einbezogen werden.)

Die Bewertungskriterien sollten den Gruppen zu Beginn der Werkstatt mitgeteilt werden. Dies kann in Form eines Informationsblattes geschehen, wozu sich ebenfalls eine Vorlage im Lehrerheft befindet.

Die Mitarbeitsnote für die Zeit der Lernwerkstatt setzt sich aus zwei Teilnoten zusammen - einer Gruppennote und einer Individualnote.

Bewertung der Gruppe: Inhalte: Mathematische Zusammenhänge werden schnell erfasst.

- Die Gruppe hat eigene gute Ideen.
- Die Gruppe erarbeitet sich selbstständig die Inhalte.
- Es werden mehrere Lösungswege berücksichtigt und evtl. verglichen.
- Die Gruppe hat ihre Arbeit zügig erledigt, auch wenn „Erholungspausen“ gemacht wurden.

Kooperation:

- Die Gruppe arbeitet gut zusammen. Jedes Mitglied wird mit seinen Fragen und „Nicht-Fragen“ beachtet.
- Die Aufgaben werden besprochen und Lösungen zusammen überlegt.

Organisation:

- Die Zeit ist sinnvoll eingeteilt und alle sorgen dafür, dass die Planung eingehalten wird.
- Die Gruppe hat Absprachen bzgl. Hausaufgaben getroffen, um so zügiger voran zu kommen.
- Anfallende Aufgaben (z.B.: bei der Vorbereitung der Präsentation) sind gerecht und sinnvoll aufgeteilt.

Dokumentation:

- Aus der Dokumentation erkennt man gut den Gedankengang der Arbeit.
- Das Aufgeschriebene ist inhaltlich richtig.
- Die Gliederung ist sinnvoll.

Präsentation:

- Die Präsentation ist gut und übersichtlich gegliedert und sachlich korrekt.
- Die Visualisierung unterstützt das Gesagte sehr gut.
- Man spürt, dass alle Gruppenmitglieder an der Vorbereitung der Präsentation beteiligt waren und das Thema durchdrungen haben.
- Die Präsentation hat eine „eigene Handschrift“.

Bewertung der/s Einzelnen: Grundsätzlich gelten hier ähnliche Kriterien wie bei der Gruppennote. Insbesondere wird beachtet, welchen Beitrag der/die Einzelne für den Gesamtertrag der Gruppe leistet und inwieweit er sich mitverantwortlich zeigt.

Technische Hinweise zur Nutzung des Rechners

Technische Hinweise Voyage-200 / TI-89 / TI-92+ / TI 83 plus

In der nachfolgenden Tabelle sind die Bedienungsschritte wie im Handbuch angegeben. Zum Beispiel gibt [Y=], [HOME] oder [GRAPH] an, in welchem Editor Sie sich befinden. Sie wechseln zwischen den Editoren über die [APPS]-Taste oder über die Zweitbelegung der Tasten in der oberen Zeile der Tastatur.
Kursiv ist jeweils das geschrieben, *was der Rechner vorgibt.*
Fett geschrieben sind die **Eingaben**, die einzutippen sind.
Tasten sind mit [...] bezeichnet.

Was wollen Sie erreichen?	Wie man das macht!
Eine Funktion eingeben	[Y=] *y1(x)* = **(Term)**
Den Graphen einer Funktion zeichnen	[Graph]
Den Betrag einer Zahl oder eines Terms eingeben, z. B. $\|x^2 - 1\|$	**abs (x^2 – 1)**
Die Skalierung der Koordinatenachsen ändern	[Graphik] **F2-Zoom** z. B.: ZoomSqr – gleiche Breite und Höhe im Koordinatensystem oder: [Windows]
Den Graphen einer Funktion nur teilweise zeichnen, z.B. für 0 < x < 30	[Y=] *y1(x)*= **(Term)| x > 0 and x < 30)** Hinweis: Bei konstanten Funktionen bitte 0*x als Summand im Term ergänzen.

Die folgenden Tastenfunktionen stehen nur auf den Rechnern TI 89, 92 und Voyage 200 zur Verfügung.

Die Ableitung einer Funktion bestimmen	[HOME] F3 – 1 oder 2nd – 8 z. B.: *d* **(x^3, x)**
Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle bestimmen	[HOME] Sie müssen zunächst die Ableitungsfunktion bestimmen und setzen dann den x-Wert ein, von dem Sie die Ableitung bestimmen wollen.
Die 2., 3. oder n-te Ableitung einer Funktion bestimmen	[HOME] Ähnlich wie bei der Eingabe zur Bestimmung der Ableitungsfunktion, nur ergänzen Sie in der Klammer eine 2,3 oder n. F3 – 1 oder 2nd – 8 z. B.: *d* **(x^3, x, 2)**
Eine Gleichung lösen (z. B. Nullstellenbestimmung)	[HOME] F2 – 1 (solve), Eingabe z. B.: solve (x^3 = 5, x)

Musterblatt für die Dokumentation

Musterblatt für die Dokumentation

Gestalten Sie Ihr Heft zu dieser Lernwerkstatt so, dass es auch später noch (z.B. bei der Abiturvorbereitung) als hilfreiches Nachschlagewerk dienen kann.

Datum ....

Aufgaben-/Problemstellung: ....
....usw.

Erste Überlegungen:
....
....
....usw.

- Vermutungen
- Offene Fragen
- Wissenslücken
- Erste Ideen
- ...

So bin ich / sind wir vorgegangen:
(Natürlich kann man das auch anders nennen: Struktur des Vorgehens, Arbeitsplan,....!)
....
....
....usw.

- Lösungsideen
- Lösungen
- Aha-Erlebnisse
- Reflexionen (z.B.: Gemachte Fehler?, Was hätte man besser machen können?)
- ...

Verallgemeinerung:
....
....
....usw.

- Begriffe: Definitionen und Sätze (selbst formuliert oder aus Lehrbüchern übernommen)
- Evtl. Beispielaufgaben
- Standortbestimmung
- ...

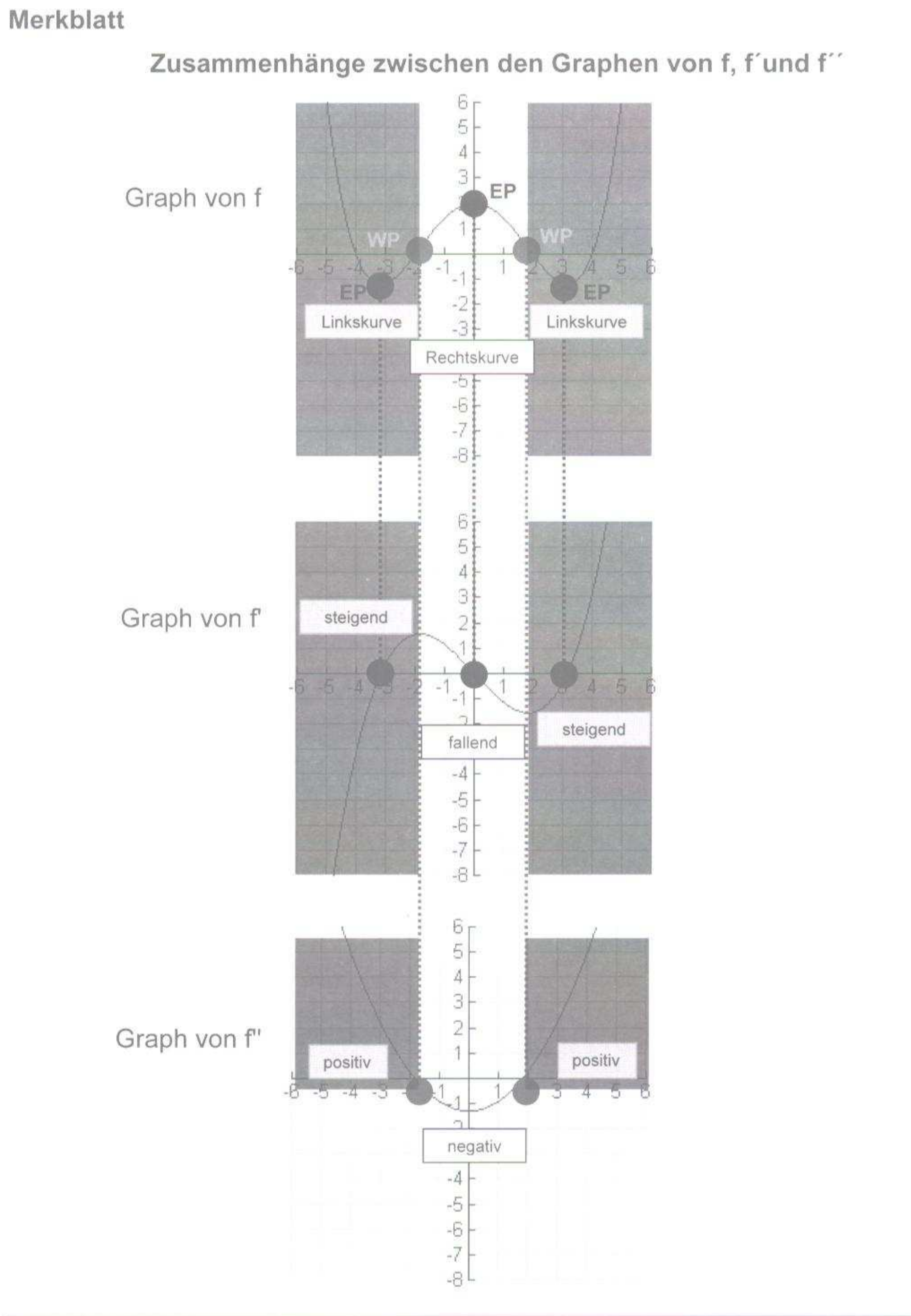
Anmerkungen:
(entweder hier oder zwischendurch)
....

- Persönliche Anmerkungen
- Persönliche Bewertungen
- Verbindungen zwischen Thema und Alltag?
- Gedanken über den Unterrichtsstil und zum persönlichen Lernen
- ...

Ratschläge für eine gelungene Dokumentation:

- Formulieren Sie die Aufgaben- und Problemstellung klar und eindeutig. Seitenangaben, die sich auf ein Buch beziehen, das später nicht mehr vorliegt, sind nicht sinnvoll.
- Notieren Sie neben fertigen Ergebnissen auch „Eselsbrücken“, Merkhilfen, gelungene von Ihnen formulierte Erklärungen, überzeugende Beispiele u.Ä.
- Schreiben Sie sprachlich korrekt, klar, eindeutig und verständlich.
- Nehmen Sie auch Verallgemeinerungen (evtl. aus Lehrbüchern übernommen) an passender Stelle mit auf.
- Beantworten Sie Fragen.
- Nehmen Sie neue Fragen und eigene Gedanken mit auf.
- Geben Sie Zusammenfassungen von Gesprächen und Überlegungen im Unterricht wieder.
- Ermöglichen Sie eine Arbeitsrückschau.

Merkblatt für Baustein K



Lernkontrolle

[1]

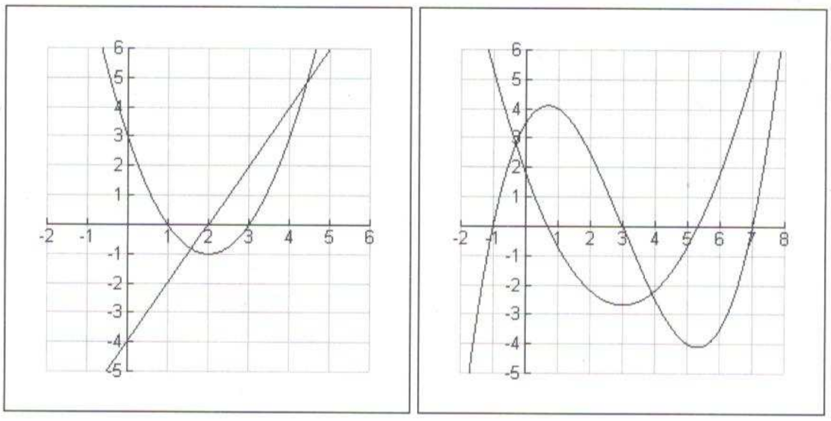
Lernkontrolle am Ende der Lernwerkstatt (Zeit: 45 min)

1. Erläutern Sie:
   Was versteht man unter einem Wendepunkt einer Funktion f und wie werden dessen Koordinaten berechnet?

2. Gegeben ist f durch die Gleichung: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 2$.
   (Begründen Sie Ihre Antworten auf die folgenden Fragen durch eine Rechnung.)
   a) In welchen Bereichen hat der Graph zu f eine Links- bzw. Rechtskurve?
   b) Ermitteln Sie die Gleichung einer Tangente an f im Punkt P(1/f(1)).
   c) In welchen Punkten hat der Graph zur Funktion f den Anstieg (–1)?

3. Entscheiden Sie – wahr (w) oder falsch (f)?
   a) Eine ganzrationale Funktion 4. Grades hat höchstens zwei Wendepunkte.
   b) Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat zwei Extrempunkte.
   c) Wenn eine ganzrationale Funktion 3. Grades nur eine Nullstelle hat, dann hat sie keinen Extrempunkt.
   d) Wenn eine ganzrationale Funktion 3. Grades drei Nullstellen besitzt, dann hat sie zwei Extrempunkte.
   e) Wenn eine Funktion f an einer Stelle x_0 eine Maximalstelle besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$.

4. Beschriften Sie die Graphen mit f' und f'' und skizzieren Sie jeweils den Graphen einer „passenden" Funktion f. Welchen Grad hat die Funktion f?



5. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.
   a) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-1{,}5 \leq x \leq 2$.
   b) Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion f.
   c) Ermitteln Sie die Koordinaten der Extrempunkte.
   d) Untersuchen Sie den Graphen auf das Vorhandensein von Wendepunkten.

[1] Diese Lernkontrolle soll als Vorbereitung zur Klausur gelten.

Klausurvorschläge

Klausur (Zeit: 90 min)

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob wahr (w) oder falsch (f). Begründen Sie Ihre Entscheidung in wenigen Worten oder durch eine Skizze.

a) Eine ganzrationale Funktion 5. Grades hat mindestens einen Extrempunkt.
b) Eine ganzrationale Funktion 4. Grades hat mindestens einen Extrempunkt.
c) Wenn eine Funktion f an einer Stelle x_0 einen Tiefpunkt besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.
d) Besitzt eine ganzrationale Funktion drei Wendepunkte, muss sie mindestens 5. Grades sein.
e) Ein Wendepunkt ist der Punkt, an dem der Graph die größte oder kleinste Steigung hat.

Aufgabe 2

Erklären Sie, warum es bei der Bestimmung eines Extrempunktes nicht ausreicht, lediglich die Stellen zu ermitteln, an denen der Graph die Tangentensteigung 0 hat.

Aufgabe 3

Vom Graphen von f sind die folgenden Angaben gegeben.
Skizzieren Sie den Graphen in ein Koordinatensystem.

$f(-3{,}9) = 0$	$f'(-2{,}5) = 0$	$f''(-1) = 0$	für $x < -1$ gilt:	$f'' > 0$
$f(1{,}1) = 0$	$f'(2{,}5) = 0$	$f''(2) = 0$	für $-1 < x < 2$ gilt:	$f'' < 0$
$f(2) = 0$	$f'(1{,}5) = 0$		für $x > 2$ gilt:	$f'' > 0$
$f(2{,}8) = 0$				

(*Zusatz: Ist der Graph durch die Angaben eindeutig bestimmt? Begründen Sie.)

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$.

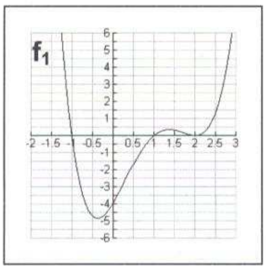
Suchen Sie möglichst viele charakteristische Punkte und Eigenschaften dieser Funktion und weisen Sie diese (möglichst) rechnerisch nach.

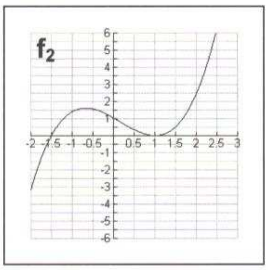
Aufgabe 5

Bestimmen Sie auf rechnerischem Weg die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 3$.
Welche Vorteile bringt die grafische oder tabellarische Bestimmung der Nullstellen?

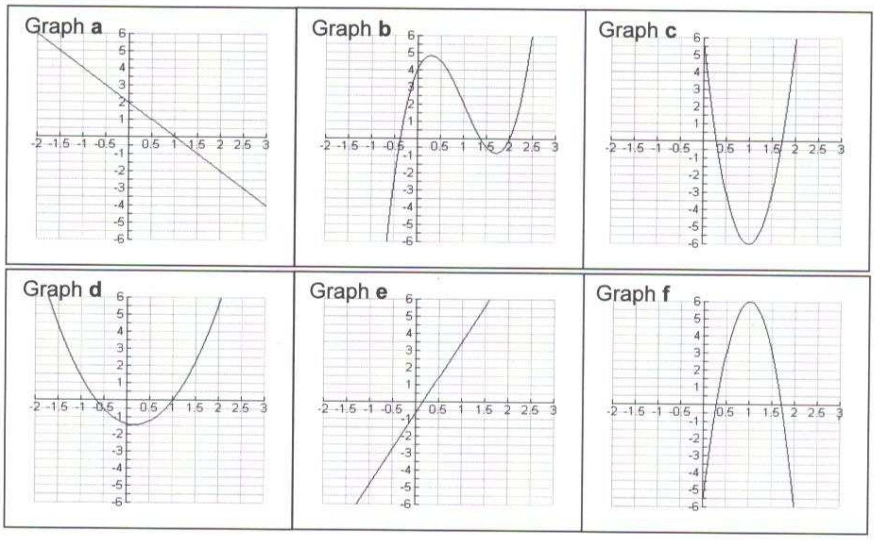
Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionsgraphen zu $f_1(x)$ und $f_2(x)$:





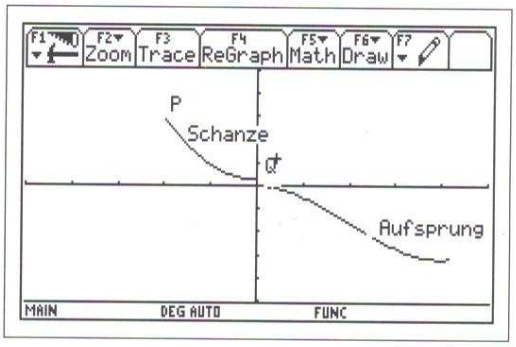
Welche der folgenden Funktionsgraphen stellt den Graphen der ersten bzw. zweiten Ableitungsfunktion zu $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ dar? (Begründen Sie kurz.)



Aufgabe 7

Eine Skisprunganlage mit Schanze und Aufsprunghügel ist im Querschnitt im Koordinatensystem dargestellt.
Charakteristische Merkmale und Punkte sind:

- Der Springer startet im Punkt P (–60|88) mit dem Anlauf.
- Der Absprung erfolgt horizontal im Punkt Q (0/8).



a) Ermitteln Sie eine Funktion mit möglichst niedrigem Grad, die die Schanze beschreibt.

b) Begründen Sie, warum Sie eine Funktion mit Grad ... gewählt haben.

c) Der Aufsprunghügel entspricht der Funktion $g(x) = \frac{1}{9000}x^3 - \frac{1}{50}x^2$ mit $0 < x < 125$.

Wenn man alle äußeren Einflüsse außer Acht lässt, dann bewegt sich der Springer auf einer Flugbahn mit der Gleichung $s(x) = -ax^2 + h$.
Hier ist h = 8 die Höhe des Absprungs und a ein Parameter abhängig von der Erdanziehungskraft und der Absprunggeschwindigkeit v in $\frac{m}{s}$.

Für a gilt $a = \frac{9{,}81}{2 \cdot v^2}$. Also ist $s(x) = -\frac{9{,}81}{2 \cdot v^2}x^2 + 8$ die Gleichung der Sprungkurve.
Mit welcher Geschwindigkeit v ist der Springer Martin Hannawald abgesprungen, wenn er im Punkt L (82 | ...) gelandet ist?

Anhang B

Zentrale Vergleichsklausur in NRW 2003

Vergleichsklausur 2003 in der Jahrgangsstufe 11

Termin: 2. Juli 2003, 3. und 4. Stunde

Hinweis: Die Aufgaben 1 bis 3 sind verpflichtende Aufgaben für alle Schülerinnen und Schüler. Zusätzlich muss der Fachlehrer für seinen Kurs entweder Aufgabe 4 /Alternative 1 (Analytische Geometrie) oder Aufgabe 4 /Alternative 2 (Beschreibende Statistik) zur Bearbeitung auswählen.

Aufgabe 1

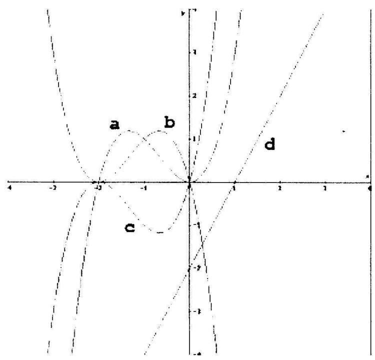
Gegeben ist die Funktion f mit

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 3$.

a) Berechnen Sie die Extremstellen und die Wendestelle der Funktion f.
(Hinweis: Die y-Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte sind nicht zu berechnen.)

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P_0(0;?)$.

c) Wo schneidet die Tangente den Graphen ein zweites Mal?

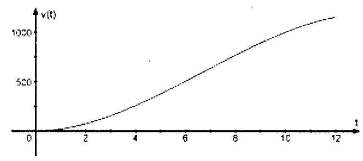


Aufgabe 2

In dem nebenstehenden Bild sind mehrere Graphen abgebildet. Welcher Graph gehört zur Funktion f mit $f(x) = x(x+2)^2$? Kurze Begründung!

Aufgabe 3

Pflanzen produzieren bei der Fotosynthese Sauerstoff, den sie an ihre Umgebung abgeben. Wir betrachten nun diesen Vorgang für einen bestimmten Baum an einem bestimmten Tag zwischen 6 Uhr morgens (Sonnenaufgang) und 18 Uhr abends (Sonnenuntergang). Messungen ergaben für diesen Baum den abgebildeten Graphen.



Hierbei gibt t an, wie viel Stunden seit dem Sonnenaufgang um 6 Uhr vergangen sind.
$v(t)$ gibt an, wie viel Liter Sauerstoff der Baum bis zum Zeitpunkt t insgesamt produziert hat.

Der Graph kann näherungsweise beschrieben werden durch

$$v(t) = -t^3 + 20t^2 \quad \text{mit } 0 \le t \le 12 .$$

a) Zeigen Sie, dass der Baum bis 13 Uhr insgesamt 637 Liter Sauerstoff produziert hat. Wie viel Sauerstoff gibt der Baum zwischen 13 Uhr und 17 Uhr durchschnittlich pro Stunde ab?

b) Um wie viel Prozent ist die Produktion zwischen 15 Uhr und 17 Uhr niedriger als zwischen 13 Uhr und 15 Uhr? (Runden Sie das Endergebnis auf eine Dezimale.)

c) Bestimmen Sie die Steigung von v an der Stelle $t = 5$, und erläutern Sie die Bedeutung dieses Wertes in dem gegebenen Sachzusammenhang.

d) Wann produziert der Baum am meisten Sauerstoff? Geben Sie zunächst eine begründete Vermutung. Erläutern Sie anschließend, wie man diesen Zeitpunkt rechnerisch ermitteln kann.

Aufgabe 4 / Alternative 1 (Analytische Geometrie)

a) Ein Kreis mit Radius 5 berührt die y-Achse im Ursprung von rechts. Begründen Sie, dass für seine Gleichung dann $y^2 = 10 \cdot x - x^2$ gilt.

b) Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt B(8|4) ? Fertigen Sie eine Zeichnung an.

c) Der Kreis wird verschoben, sein Mittelpunkt liegt nun im Punkt M'(9|-3). Ergänzen Sie die Zeichnung aus Teil b.

d) Wie liegt die Tangente aus Teil b zu dem neuen Kreis? Begründen Sie Ihre Antwort, ohne viel zu rechnen.

Aufgabe 4 / Alternative 2 (Beschreibende Statistik)

Die Tabelle gibt die Körpergröße und das Gewicht von 8 Schülern an.

Größe in cm	Gewicht in kg
157	45
157	47
159	45
163	55
165	56
167	55
169	56
174	61

a) Fassen Sie die Körpergröße als x- und das Gewicht als y-Koordinate auf und stellen Sie den Datensatz in einem Koordinatensystem als Punktwolke dar.

b) Regressionsgerade nach Augenmaß: Berechnen Sie die beiden Mittelwerte $\overline{x}$ und $\overline{y}$. Tragen Sie den Datenschwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ in die Zeichnung ein, und legen Sie eine Regressionsgerade g durch den Datenschwerpunkt und den Punkt (169|56). Geben Sie die Gleichung der Geraden g an.

c) Benutzen Sie g, um das Gewicht eines Schülers mit der Körpergröße 178 cm zu schätzen.

d) Eine Regressionsgerade geht in jedem Fall durch den Datenschwerpunkt. Die gesuchte Steigung kann nach Augenmaß oder durch eine Rechnung ermittelt werden, die auf der Methode der kleinsten Quadrate beruht. Beschreiben Sie kurz die Idee dieser Methode.

Anhang C

Abschließender Vergleichstest

Didaktik der Mathematik

Universität Duisburg-Essen (Campus Duisburg)
Lotharstraße 63-65, 47048 Duisburg
Bärbel Barzel

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Forschungsprojekt: MUKI – Mathematikunterricht zwischen Konstruktion und Instruktion
- Evaluation einer Lernwerkstatt im 11.Jahrgang mit integriertem Rechnereinsatz -

Schule: ________________________________

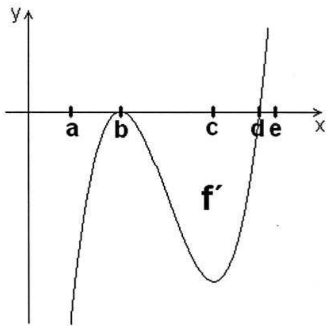
Lehrperson: ________________________________

Liebe Schülerinnen und Schüler,
die folgenden Aufgaben dienen zur vergleichenden Untersuchung im Rahmen eines Forschungsprojektes an der Universität Duisburg-Essen.
Wir bitten Sie, die Aufgaben sorgfältig und leserlich zu lösen.
Da es sich um Abitur-relevanten Unterrichtsstoff handelt, kann eine Rückmeldung für Sie lohnend sein. Deshalb bieten wir Ihnen an, die korrigierte Fassung Ihrer Lösungen zurück zu senden. Vermerken Sie dies bitte hier durch ankreuzen. Geben Sie in diesem Fall Ihren Namen an.

☐ Ja, ich möchte meine Lösungen mit Korrektur zurück.

Name: ________________________________

Aufgabe 1:
f sei eine ganzrationale Funktion über dem Intervall [a,e].
Der Graph der Ableitungsfunktion **f '** ist in der folgenden Zeichnung gegeben.



a) Machen Sie eine begründete Aussage über den Grad der Ableitungsfunktion **f '**.
b) In welchen Intervallen steigt der Graph von **f**, in welchen Intervallen fällt er (Begründung!)?
c) Welches Verhalten zeigt der Graph von f an den Stellen b, c und d (Begründung!)?
d) Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen von **f**.
e) Machen Sie eine begründete Aussage über die mögliche Anzahl von Nullstellen von **f** im Intervall [a,e].

Aufgabe 2:
Gegeben ist der Graph der ganzrationalen Funktion **f** gemäß *Bild 1*.

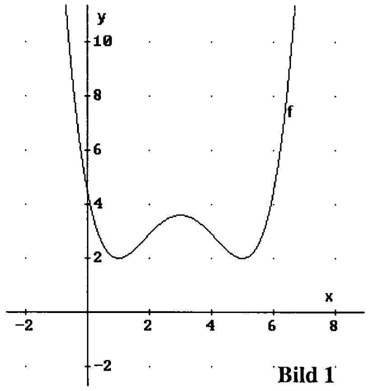


Bild 1

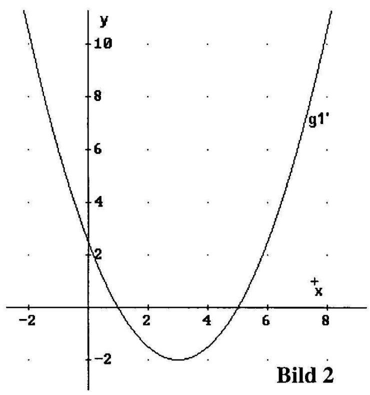


Bild 2

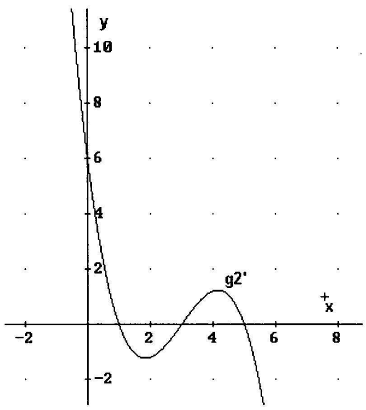


Bild 3

a. In *Bild 2* und *Bild 3* sind die Graphen von Ableitungsfunktionen **g'_1** und **g'_2** dargestellt. Begründen Sie, warum keine der beiden Funktionen als Ableitung von **f** in Frage kommen kann.

b. Markieren Sie auf dem Graphen von **f** in *Bild 1* die Anteile in einer anderen Farbe, für die **f '(x)>0** gilt. Skizzieren Sie dann den Graphen von **f '(x)**.

c. Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion**g_1**, die als Ableitung die Funktion **g'_1**aus *Bild 2* hat.

Anhang D

Fragebögen

Schülerfragebogen zur Lernwerkstatt "Ganzrationale Funktionen"

Liebe Schülerin, lieber Schüler,
Sie haben im Mathematikunterricht an der Lernwerkstatt zu "Ganzrationalen Funktionen" gearbeitet. Ich möchte Sie mit dem folgenden Fragebogen um Ihre Einschätzung der Lernwerkstatt bitten. Dieser Fragebogen dient dazu, die Inhalte und die Organisationsform der Lernwerkstatt sowie den Rechnereinsatz auf Tauglichkeit für Mathematikunterricht zu prüfen. Dazu ist gerade Ihre Einschätzung sehr wichtig! Ihre Antworten werden vertraulich behandelt. Die Angaben zu Ihrer Arbeitsgruppe bzw. Ihrem Kurs dienen lediglich dazu, individuelle Einschätzungen unterschiedlicher Gruppen - bzw. Kursmitglieder zu vergleichen.
Für Ihre Mühe bedanke ich mich recht herzlich, Bärbel Barzel

---

1. Mit Mathematik beschäftige ich mich....

   sehr ungern **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** sehr gern
   [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

Die folgenden Fragen beziehen sich auf ihren allgemeinen Eindruck der Lernwerkstatt:

2. Die Arbeit an der Lernwerkstatt hat mir Spaß gemacht.

   stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
   [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

3. Durch die Lernwerkstatt habe ich einen neuen Zugang zur Mathematik gewonnen.

   stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
   [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

Die folgenden Fragen beziehen sich auf einzelne Bausteine und die Inhalte der Lernwerkstatt:

4. Welcher Baustein hat Ihnen am meisten Spaß gemacht?
   (Mehrfachnennung möglich!)

A [ ] W	D [ ] L	G [ ] N	J [ ] Z	M [ ] F
B [ ] A	E [ ] K	H [ ] R	K [ ] C	
C [ ] E	F [ ] S	I [ ] G	L [ ] Q	

5. Welcher Baustein hat Ihnen am wenigsten Spaß gemacht?
   (Mehrfachnennung möglich!)

A [ ] W	D [ ] L	G [ ] N	J [ ] Z	M [ ] F
B [ ] A	E [ ] K	H [ ] R	K [ ] C	
C [ ] E	F [ ] S	I [ ] G	L [ ] Q	

6. Welchen Baustein empfanden Sie am leichtesten?
   (Mehrfachnennung möglich!)

A [ ] W	D [ ] L	G [ ] N	J [ ] Z	M [ ] F
B [ ] A	E [ ] K	H [ ] R	K [ ] C	
C [ ] E	F [ ] S	I [ ] G	L [ ] Q	

7. Welchen Baustein empfanden Sie am schwierigsten?
   (Mehrfachnennung möglich!)

A [ ] W	D [ ] L	G [ ] N	J [ ] Z	M [ ] F
B [ ] A	E [ ] K	H [ ] R	K [ ] C	
C [ ] E	F [ ] S	I [ ] G	L [ ] Q	

8. Bei welchem Baustein ist Ihnen am meisten klar geworden?
   (Mehrfachnennung möglich!)

A [ ] W	D [ ] L	G [ ] N	J [ ] Z	M [ ] F
B [ ] A	E [ ] K	H [ ] R	K [ ] C	
C [ ] E	F [ ] S	I [ ] G	L [ ] Q	

9. Ich kenne jetzt die besonderen Punkte eines Funktionsgraphen und kann diese bestimmen.

   stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
   [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

10. Bzgl. der Inhalte der Lernwerkstatt fühle ich mich immer noch sehr unsicher.

    stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
    [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

Schülerfragebogen zur Lernwerkstatt "Ganzrationale Funktionen" Seite 2

11. Ich habe bei der Lernwerkstatt die Inhalte nicht verstanden und hoffe, dass die Lehrperson alles noch einmal erklärt.

stimme gar nicht zu	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	stimme voll zu
	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	

12. Ich fand es nervig, dass so oft verschiedene Darstellungsarten einer Funktion (Term, Tabelle und Graph) einbezogen wurden.

stimme gar nicht zu	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	stimme voll zu
	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	

13. Mir hat es geholfen, dass Funktionen in verschiedenen Darstellungsarten (mal als Term, als Tabelle und/oder als Graph) einbezogen wurden.

stimme gar nicht zu	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	stimme voll zu
	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	

14. Stellen Sie sich vor, Sie haben eine Minute Zeit, jemanden zu erklären, was eine Funktion ist. Welche Darstellungsart würden Sie dabei am ehesten verwenden? (Mehrfachnennungen möglich!)

A [ ] einen Term
B [ ] einen Graphen
C [ ] eine Zahlentabelle
D [ ] eine Anwendungssituation
E [ ] allgemeine Umgangssprache

15. Mir hat es geholfen, dass wir in unserer Sprache über Mathematik reden konnten, ohne direkt verbessert zu werden.

stimme gar nicht zu	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	stimme voll zu
	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	

16. Es war viel zu schwer, sich selbst Definitionen auszudenken (z.B.: Was ist ein Extrempunkt?).

stimme gar nicht zu	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	stimme voll zu
	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	

17. Es war gut, sich die Begriffe (z.B. Extrempunkt) selbst zu erarbeiten. Dadurch habe ich mich viel intensiver damit auseinander gesetzt.

stimme gar nicht zu	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	stimme voll zu
	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	

18. Welche Tätigkeiten kamen bei der Lernwerkstatt zu kurz?
(Mehrfachnennung möglich!)

A [ ] strukturieren von Informationen
B [ ] abschreiben von Informationen (aus dem Schulbuch; vom Nachbarn)
C [ ] analysieren; genaues Hingucken
D [ ] eigene (Lösungs-)ideen entwickeln
E [ ] Mathematik in eigene Worte fassen
F [ ] sich gegenseitig erklären
G [ ] wiederholen
H [ ] nachschlagen (im Schulbuch, Internet oder Lexika)
I [ ] "schmarotzen" (von der Arbeit anderer profitieren)
J [ ] nachvollziehen von Gedanken
K [ ] dokumentieren und Heft führen
L [ ] Graphen zeichnen
M [ ] über Mathematik reden
N [ ] zuhören
O [ ] Arbeit organisieren
P [ ] üben

Schülerfragebogen zur Lernwerkstatt "Ganzrationale Funktionen" Seite 3

19. Bei welchen Tätigkeiten konnten Sie Fortschritte durch die Lernwerkstatt erzielen? (Mehrfachnennung möglich!)

A [ ] strukturieren von Informationen
B [ ] abschreiben von Informationen (aus dem Schulbuch; vom Nachbarn)
C [ ] analysieren; genaues Hingucken
D [ ] eigene (Lösungs-)ideen entwickeln
E [ ] Mathematik in eigene Worte fassen
F [ ] sich gegenseitig erklären
G [ ] wiederholen
H [ ] nachschlagen (im Schulbuch, Internet oder Lexika)
I [ ] "schmarotzen" (von der Arbeit anderer profitieren)
J [ ] nachvollziehen von Gedanken
K [ ] dokumentieren und Heft führen
L [ ] Graphen zeichnen
M [ ] über Mathematik reden
N [ ] zuhören
O [ ] Arbeit organisieren
P [ ] üben

Die folgenden Fragen beziehen sich auf die Unterrichtsform:

20. Sie haben in Gruppen zusammengearbeitet. Wie sind die Gruppen zustande gekommen?

a [ ] durch Zufall
b [ ] von uns gewählt
c [ ] von der Lehrperson festgesetzt
d [ ] zwischen Lehrperson und Schüler/inne/n ausgehandelt

21. Unserer Gruppe fehlte zwischendurch die Rückmeldung, ob wir auf dem richtigen Weg sind.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

22. Bei uns in der Gruppe war es meistens so, dass eine/r sehr schnell das Problem verstanden hat und es den anderen dann erklärt hat.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

23. Bei der Lernwerkstatt muss man mehr arbeiten als im normalen Unterricht.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

24. Ich hätte lieber alleine als in der Gruppe gearbeitet.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

25. Die Arbeit an der Lernwerkstatt war langatmig.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

26. Bei dieser Lernform beschäftige ich mich viel weniger mit Mathematik als sonst.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

27. Mir ist es zu anstrengend, so lange in einer Gruppe zu arbeiten.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

28. Es ist gut, sich selbst bzw. mit anderen was beizubringen - dadurch behält man die Sachen besser.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

29. Im normalen Unterricht gibt es extra Übungsphasen - bei der Lernwerkstatt geht alles in einem: Stoff erarbeiten und üben.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

30. Mir ist Unterricht lieber, bei dem die Lehrperson alles erklärt und vorrechnet.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

31. Wir haben uns vielmehr gegenseitig erklärt als im normalen Unterricht.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

32. Wir hatten insgesamt zu wenig Zeit.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

33. Wie oft sollte man eine solche Arbeitsform einsetzen?

a [ ] immer
b [ ] mehrmals im Halbjahr
c [ ] 1x im Halbjahr
d [ ] 1x im Jahr oder seltener
e [ ] nie

Die folgenden Fragen beziehen sich auf den Rechnereinsatz:

34. Wobei hat der Rechner geholfen?
(Mehrfachnennung möglich!)

A [ ] um Rechnungen (z.B. Ableitungen) zu kontrollieren
B [ ] um Beispiel-Graphen zu erzeugen
C [ ] um Berechnungen durchzuführen (z.B. Ableitungen)
D [ ] um auszuprobieren

35. Welchen Rechner haben Sie eingesetzt?

A [ ] TI-92+ bzw. V-200
B [ ] Derive
C [ ] MuPad
D [ ] Maple
E [ ] andere Taschenrechner/ -computer
F [ ] andere PC-Software

36. Ohne den Rechnereinsatz wäre die Lernwerkstatt nicht sinnvoll.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

37. In unserer Gruppe haben wir sehr häufig den Rechner benutzt.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

38. Der Einsatz des Rechners war überflüssig.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

Die folgenden Fragen beziehen sich auf Ihre Arbeitsorganisation:

39. Welche Informationsquellen und Nachschlagewerke haben Sie genutzt?
(Mehrfachnennungen möglich!)

A [ ] eigenes Heft
B [ ] Schulbuch
C [ ] Internet
D [ ] Lexika
E [ ] Befragen von Eltern
F [ ] Befragen von Bekannten
G [ ] Sonstiges
H [ ] Keine

40. Ich fand es gut, dass wir für die Zeit der Lernwerkstatt unsere Arbeit selbst organisieren mussten.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

41. Ich habe in der Zeit der Lernwerkstatt zu Hause deutlich weniger getan als sonst.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

42. Ich habe in der Zeit der Lernwerkstatt im Unterricht deutlich weniger getan als sonst.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

43. Wir hätten mehr Hausaufgaben verabreden sollen, um mit der Zeit besser hin zu kommen.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

44. Ich habe mein Heft ausführlicher geführt als sonst.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

45. Die Heftführung war aufwändiger als sonst, da man viel mehr eigenständig formulieren musste.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

46. Die Heftführung war sinnvoller als sonst, da man viel mehr eigenständig formulieren musste.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

Schülerfragebogen zur Lernwerkstatt "Ganzrationale Funktionen" Seite 5

47. In unserer Gruppe wurden Vereinbarungen bzgl. Hausaufgaben getroffen.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

Wir bitten Sie um die folgenden allgemeinen Angaben. Ihre Antworten werden alle vertraulich behandelt. Sie dienen ausschließlich de wissenschaftlichen Zweck, die Inhalte und die Organisationsform der Lernwerkstatt auf Ihre Tauglichkeit für Mathematikunterricht zu prüfen. Dabei ist auch die Gruppen- oder Kurszugehörigkeit von Interesse, um z.B. individuelle Einschätzungen vergleichen zu könne

48. Ihr Geschlecht:

a [ ] männlich b [ ] weiblich

49. Bitte geben Sie die Anfangsbuchstaben der Nachnamen Ihrer Gruppenmitglieder an (alphabetisch geordnet). Bitte geben Sie nur einen Buchstaben pro Person an. (St, Sch, Umlaute u.ä. zählen als 2 bzw. 3 Buchstaben.)

______

50. Sie haben mit Ihrer Lehrperson und dem ganzen Kurs ein Passwort vereinbart. Bitte geben Sie dieses Passwort hier ein.

______

51. Welche Note hatten Sie in Mathematik auf dem letzten Zeugnis?

a [ ] 1 c [ ] 3 e [ ] 5
b [ ] 2 d [ ] 4 f [ ] 6

52. Welche Schulform besuchen Sie?

a [ ] Gymnasium b [ ] Gesamtschule c [ ] Berufskolleg d [ ] Andere

53. In welchem Bundesland liegt Ihre Schule?

a [ ] Bayern
b [ ] Baden-Württemberg
c [ ] Berlin
d [ ] Brandenburg
e [ ] Bremen
f [ ] Hamburg
g [ ] Hessen
h [ ] Mecklenburg-Vorpommern
i [ ] Niedersachsen
j [ ] NRW
k [ ] Rheinland-Pfalz
l [ ] Saarland
m [ ] Sachsen
n [ ] Sachsen-Anhalt
o [ ] Schleswig-Holstein
p [ ] Thüringen

54. Anmerkungen:

______
______
______
______
______

Lehrerfragebogen zur Lernwerkstatt "Ganzrationale Funktionen"

Liebe Kollegin, lieber Kollege,
Sie haben im Mathematikunterricht die Lernwerkstatt zu "Ganzrationalen Funktionen" eingesetzt und getestet. Dafür möchte ich mich ganz herzlich bedanken.
Ich möchte Sie mit dem folgenden Fragebogen um Ihre Einschätzung der Lernwerkstatt bitten. Dieser Fragebogen ist anonym. Ihre Antworten dienen lediglich der Evaluation der Lernwerkstatt zu wissenschaftlichen Zwecken. Viele der Fragen wurden in ähnlicher Formulierung auch den Schüler/innen gestellt.

Für Ihre Mühe bedanke ich mich recht herzlich, Bärbel Barzel

Die folgenden Fragen beziehen sich auf ihren allgemeinen Eindruck der Lernwerkstatt.

1. Die Arbeit mit der Lernwerkstatt fand ich insgesamt positiv.

stimme gar nicht zu	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**+1**	**+2**	**+3**	stimme voll zu
	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	

2. Durch die Lernwerkstatt konnten die Schüler/innen einen neuen Zugang zu Mathematik gewinnen.

stimme gar nicht zu	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**+1**	**+2**	**+3**	stimme voll zu
	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	

Die folgenden Fragen beziehen sich auf einzelne Bausteine und die Inhalte der Lernwerkstatt.

3. Die Zusammenstellung der Aufgaben hat mich insgesamt überzeugt.

stimme gar nicht zu	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**+1**	**+2**	**+3**	stimme voll zu
	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	

4. Welche Bausteine empfanden Sie als wertvoll, um kooperatives Arbeiten zu üben?

A [ ] W	D [ ] L	G [ ] N	J [ ] Z	M [ ] F
B [ ] A	E [ ] K	H [ ] R	K [ ] C	
C [ ] E	F [ ] S	I [ ] G	L [ ] Q	

5. Welcher Baustein hat den Schüler/innen am meisten Spaß gemacht? (Mehrfachnennung möglich!)

A [ ] W	D [ ] L	G [ ] N	J [ ] Z	M [ ] F
B [ ] A	E [ ] K	H [ ] R	K [ ] C	
C [ ] E	F [ ] S	I [ ] G	L [ ] Q	

6. Welcher Baustein hat den Schüler/innen am wenigsten Spaß gemacht? (Mehrfachnennung möglich!)

a [ ] W	d [ ] L	g [ ] N	j [ ] Z	m [ ] F
b [ ] A	e [ ] K	h [ ] R	k [ ] C	
c [ ] E	f [ ] S	i [ ] G	l [ ] Q	

7. Welchen Baustein empfanden Sie am leichtesten für die Schüler/innen? (Mehrfachnennung möglich!)

A [ ] W	D [ ] L	G [ ] N	J [ ] Z	M [ ] F
B [ ] A	E [ ] K	H [ ] R	K [ ] C	
C [ ] E	F [ ] S	I [ ] G	L [ ] Q	

8. Welchen Baustein empfanden Sie am schwierigsten für die Schüler/innen? (Mehrfachnennung möglich!)

A [ ] W	D [ ] L	G [ ] N	J [ ] Z	M [ ] F
B [ ] A	E [ ] K	H [ ] R	K [ ] C	
C [ ] E	F [ ] S	I [ ] G	L [ ] Q	

9. Bei welchem Baustein ist den Schüler/innen am meisten klar geworden? (Mehrfachnennung möglich!)

A [ ] W	D [ ] L	G [ ] N	J [ ] Z	M [ ] F
B [ ] A	E [ ] K	H [ ] R	K [ ] C	
C [ ] E	F [ ] S	I [ ] G	L [ ] Q	

10. Bei welchen Bausteinen empfanden Sie die Aufgabenstellung als zu eng geführt?

A [ ] W	D [ ] L	G [ ] N	J [ ] Z	M [ ] F
B [ ] A	E [ ] K	H [ ] R	K [ ] C	
C [ ] E	F [ ] S	I [ ] G	L [ ] Q	

11. Für die Schüler/innen war es zu schwer, sich selbst Definitionen auszudenken (z.B.: Was ist ein Extrempunkt?)

stimme gar nicht zu	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**+1**	**+2**	**+3**	stimme voll zu
	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	

Lehrerfragebogen zur Lernwerkstatt "Ganzrationale Funktionen" Seite 2

12. Die Schüler/innen setzten sich in der Regel intensiv mit dem Stoff auseinander.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

13. Die Variation der Aufgabenstellungen hätte insgesamt größer sein können.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

14. Es war hilfreich, dass die verschiedenen Darstellungsarten einer Funktion (Term, Tabelle und Graph) so oft einbezogen wurden.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

15. Stellen Sie sich vor, Sie haben eine Minute Zeit, jemandem zu erklären, was eine Funktion ist. Welche Darstellungsart benutzen Sie dann am ehesten?
(Mehrfachnennung möglich!)

A [ ] einen Term
B [ ] einen Graphen
C [ ] eine Tabelle
D [ ] eine Anwendungssituation
E [ ] allgemeine Umgangssprache
F [ ] eine Definition

16. Welche Tätigkeiten kamen bei der Lernwerkstatt zu kurz?
(Mehrfachnennungen möglich! Falls Tätigkeiten fehlen, können Sie diese in der nächsten Frage nennen.)

A [ ] strukturieren von Informationen
B [ ] abschreiben von Informationen (aus dem Schulbuch; vom Nachbarn)
C [ ] analysieren; genaues Hingucken
D [ ] eigene (Lösungs-)ideen entwickeln
E [ ] Mathematik in eigene Worte fassen
F [ ] sich gegenseitig erklären
G [ ] wiederholen
H [ ] nachschlagen (im Schulbuch, Internet oder Lexika)
I [ ] "schmarotzen" (von der Arbeit anderer profitieren)
J [ ] nachvollziehen von Gedanken
K [ ] dokumentieren und Heft führen
L [ ] Graphen zeichnen
M [ ] über Mathematik reden
N [ ] zuhören
O [ ] Arbeit organisieren
P [ ] üben

17. Weitere Tätigkeiten, die bei der Lernwerkstatt zu kurz kamen:

18. Welche Tätigkeiten wurden durch die Lernwerkstatt gefördert?
(Mehrfachnennungen möglich. Falls Tätigkeiten fehlen, können Sie diese in der nächsten Frage nennen.)

A [ ] strukturieren von Informationen
B [ ] abschreiben von Informationen (aus dem Schulbuch; vom Nachbarn)
C [ ] analysieren; genaues Hingucken
D [ ] eigene (Lösungs-)ideen entwickeln
E [ ] Mathematik in eigene Worte fassen
F [ ] sich gegenseitig erklären
G [ ] wiederholen
H [ ] nachschlagen (im Schulbuch, Internet oder Lexika)
I [ ] "schmarotzen" (von der Arbeit anderer profitieren)
J [ ] nachvollziehen von Gedanken
K [ ] dokumentieren und Heft führen
L [ ] Graphen zeichnen
M [ ] über Mathematik reden
N [ ] zuhören
O [ ] Arbeit organisieren
P [ ] üben

19. Weitere Tätigkeiten, die durch die Lernwerkstatt gefördert wurden:

Lehrerfragebogen zur Lernwerkstatt "Ganzrationale Funktionen" Seite 3

Die folgenden Fragen beziehen sich auf die Unterrichtsform:

20. Nach meinem Eindruck haben die Schüler/innen bei dieser Arbeitsform weniger getan als sonst in einem gut strukturierten Frontalunterricht mit Übungsphasen.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

21. Ich bekomme bei einer solchen Arbeitsform mehr von den einzelnen Schüler/inne/n mit als sonst.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

22. Das Unterrichten auf diese Weise ist anstrengender als herkömmlicher Unterricht.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

23. Im normalen Unterricht gibt es extra Übungsphasen - bei der Lernwerkstatt geht alles in einem: Stoff erarbeiten und üben

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

24. Es ist mir schwer gefallen, mich zurückzuhalten. Ich wollte lieber gleich erklären und die entscheidenden Tipps geben.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

25. Es ist für die Schüler/innen zu anstrengend, so lange selbstständig zu arbeiten.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

26. Mir ist Unterricht lieber, bei dem ich zunächst den neuen Stoff erkläre bzw. neue Verfahren vorrechne.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

27. Die Schüler/innen haben sich viel gegenseitig erklärt.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

28. Es ist normal, dass zunächst auch Ungenauigkeiten oder sogar Falsches formuliert wird, wenn sich die Schüler/innen die Inhalte selbst erarbeiten.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

29. Es ist nicht gut, dass Ungenauigkeiten und Fehler nicht sofort verbessert werden können, da man als Lehrperson nicht in allen Gruppen gleichzeitig sein kann.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

30. Es war notwendig, dass ich im Nachhinein alles noch einmal erklärt habe.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

31. Wie oft sollte man eine solche Arbeitsform einsetzen?

a [ ] immer
c [ ] 1x im Halbjahr
e [ ] nie
b [ ] mehrmals im Halbjahr
d [ ] 1x im Jahr oder seltener

Die folgenden Fragen beziehen sich auf den Rechnereinsatz.

32. Wozu wurde der Rechner eingesetzt? (Mehrfachnennungen sind möglich.)

A [ ] Zur Kontrolle
C [ ] Für komplizierte Rechnungen
B [ ] Zur Visualisierung
D [ ] Zum Erzeugen vieler Beispiele.

33. Ohne den Rechnereinsatz wäre die Lernwerkstatt nicht sinnvoll.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

34. Der Rechner wurde häufig benutzt.

stimme gar nicht zu **-3 -2 -1 0 +1 +2 +3** stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

Lehrerfragebogen zur Lernwerkstatt "Ganzrationale Funktionen" Seite 4

35. Die meisten Schüler/innen haben in der Zeit der Lernwerkstatt zu Hause mehr getan als sonst.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

36. Die meisten Schüler/innen haben in der Zeit der Lernwerkstatt im Unterricht mehr getan als sonst.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

37. Es haben nur wenige Schüler/innen ihr Heft im Sinne eines Lerntagebuchs (vgl. "Musterblatt für die Dokumentation", S.15 im Lehrerheft) geführt, die meisten machten es traditionell.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

38. Die Hefte, die sorgfältig geführt waren, waren sehr aufschlussreich und interessant.

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

39. Die Schüler/innen organisierten sich in der Regel sehr gut selbst (z.B. beim Hausaufgaben verabreden, Nachschlagewerke benutzen, Lösungsstrategien ändern usw.)

stimme gar nicht zu -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 stimme voll zu
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

40. Wie viel Zeit haben Sie für diese Sequenz benötigt?
(reine Unterrichtszeit - ohne Test bzw. Klausuren)

a [ ] weniger als 12 Unterrichtsstunden
b [ ] zwischen 12 und 18 Unterrichtsstunden
c [ ] mehr als 18 Unterrichtsstunden

41. Welche Bausteine wurden als Lernwerkstatt selbstständig von allen Schüler/inne/n erarbeitet?

A [ ] W	D [ ] L	G [ ] N	J [ ] Z	M [ ] F
B [ ] A	E [ ] K	H [ ] R	K [ ] C	
C [ ] E	F [ ] S	I [ ] G	L [ ] Q	

42. Welche Bausteine wurden nur von einzelnen Schülergruppen erarbeitet und dann der Klasse weitergegeben?

A [ ] W	D [ ] L	G [ ] N	J [ ] Z	M [ ] F
B [ ] A	E [ ] K	H [ ] R	K [ ] C	
C [ ] E	F [ ] S	I [ ] G	L [ ] Q	

43. Welche Bausteine haben Sie ganz weggelassen?

A [ ] W	D [ ] L	G [ ] N	J [ ] Z	M [ ] F
B [ ] A	E [ ] K	H [ ] R	K [ ] C	
C [ ] E	F [ ] S	I [ ] G	L [ ] Q	

44. Sie haben mit Ihrem Kurs ein Passwort vereinbart. Bitte geben Sie dieses Passwort hier ein.

Zum Schluss bitte ich Sie noch um allgemeine Angaben.

45. Ihr Geschlecht:

a [ ] Männlich b [ ] Weiblich

46. Anmerkungen:

Anhang E

Transkripte

E.1 Transkript zur Video-Sequenz „Legespiel“

Es werden folgende Transkriptionszeichen verwendet:
<: sprechen teilweise gleichzeitig
/ bzw. \ Stimme wird gehoben bzw. gesenkt
g e s p e r r t: gedehnt bzw. langsam gesprochen
fett: betont gesprochene Wörter
. .. . . . : Sprechpausen
(Wort): eingeklammerte Wörter sind nicht zweifelsfrei verständlich
kursiv: Ausdruck, Gestik, Mimik, Handlungen etc.

Die drei Schülerinnen A, U, P und der Schüler C arbeiten an der Aufgabenstellung zu Baustein Z – „Was gehört zusammen?“ (vgl. 3). Dabei sollen sie aus 13 vorgegebenen Legeteilen mit jeweils einem Graphen drei Sets herausfinden, die jeweils den Graphen zu einer Funktion, deren Ableitungsfunktion und den Graphen zur zweiten Ableitung darstellen. Es bleiben also letztlich vier Legeteile übrig, die nicht zugeordnet werden können. Als Vorlage gibt es eine leere 3x3-Tabelle, in die die passenden Sets einsortiert werden können.

U, P und C sitzen nebeneinander am Tisch und haben die Legeteile vor sich liegen, A sitzt über Eck neben U und stützt sich mit dem Ellenbogen auf den Tisch. Das Transkript beginnt nicht zu Beginn der Aufgabenbearbeitung. Die Situation: Es wurde noch kein Set erkannt, jedoch wurden die Legeteile bereits vorsortiert nach dem Grad der zugehörigen Funktionen. Bild E.1 zeigt die Anordnung der Legeteile zu Beginn des Transkriptes.

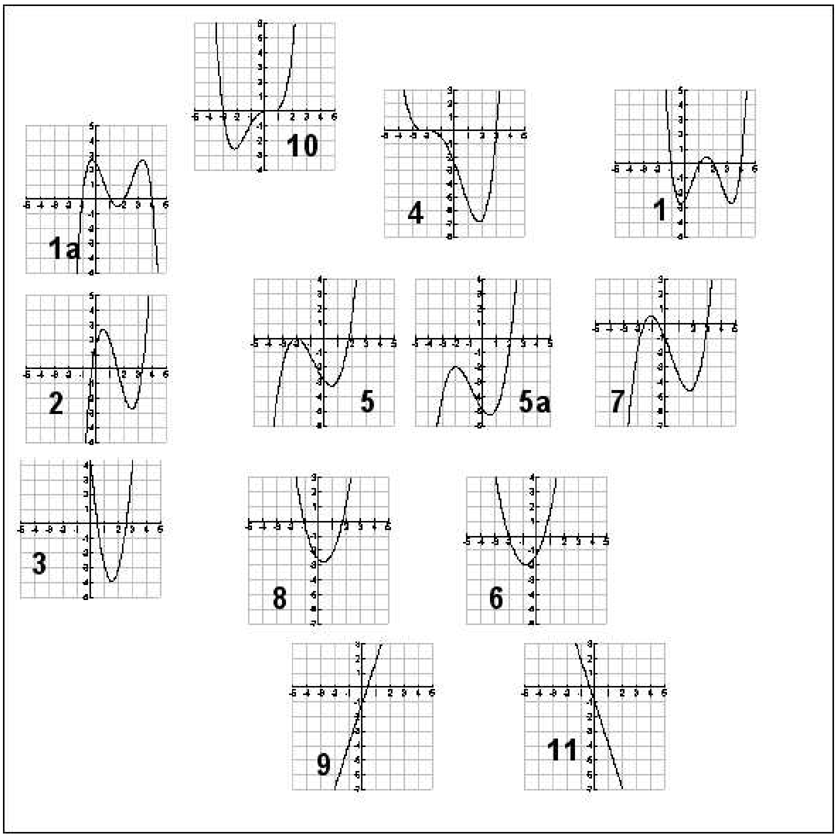


Abbildung E.1: Anordnung der Legeteile bis Zeile 53

P: dass diese drei so zusammen passen *zeigt auf K1a, K2 und K3 , zu U gewandt*
U<: ja aber . . . dann nur der Verl . . . *zeigt auf K4*
P<: Nur dass fallend und steigend nicht. . . \
U: Ja aber wenn du aber wenn du auf den jetzt hier guckst - *zeigt auf K4*
P: Wir hatten ja gerade gesagt man kann die nach oben verschieben einfach es geht nur um den Verlauf / Es geht nicht unbedingt . . . darum ob
U<: Ja aber -
P: . . . ja doch es geht nur um den Verlauf \ *guckt U an*
(4 sec)
U: Ja aber trotzdem . . . auch wenn . . . *zeigt auf K4* aber du kannst es ja verschieben *Schwingbewegung in y-Richtung mit der Hand* wie du willst es bleibt immer im negativen Bereich *zeigt auf K4, x>0* wenn es im negativen Bereich ist \
P: Ja stimmt die Steigung muss im negativen Bereich sein deswegen
(3 sec)
U: Also gucken wir einfach mal weiter ne *U schiebt K1a nach oben, P schiebt sie zurück*

U: Davon *zeigt u.a. auf K1* muss ja sowieso nur einer passen
5 sec – alle gucken auf die Karten; P zeigt auf K1a, A auf K4, U auf K1
P: Der Graph steigt *zeigt auf K2* . . . also müsste. . . *geht einmal zu K1a und wieder zu K2*
(2 sec)
P: Ja hier ist die Steigung im positiven Bereich *zeigt auf K 2 mit gerader Bewegung in y-Richtung* auf jeden Fall . . . im negativen Bereich da / also fällt er
Gong zum Pausenende der 1. Stunde der Doppelstunde
U: *murmelt*, zeigt auf K2
P: nein das sind zwei
A zeigt auch auf K2
U: Wenn es der ist . . . dann müsste ( )
P: Nein das ist die zweite
U: Der ist
P: Das kann aber auch die erste sein . . . Das ist ja egal. . .
A ( ) *mischt sich ein - murmelt etwas zeigt auf Karten*
A: Das ist stimmt
(2 sec)
P: Also wenn in der zweiten Ableitung *zeigt auf K2* der Graph im negativen Bereich ist, dann muss in der ersten Ableitung der Graph fallend sein
U<: Der nach der *zeigt von K1a auf K2* geht ja schon mal nicht der nach der, weil die sind beide steigend *zeigt auf K1a und K2 mit gerader Bewegung in y-Richtung*-dat geht ja schon mal nicht \ *P schiebt K1 nach oben*
U: Oh nee /
U: Hatten wir den da schon ausgemustert / *zeigt auf K1*
U: Machen wir erst mal weiter *verschiebt Teile ohne die grundsätzliche Anordnung zu verändern* Den hier *zeigt auf K1*
U: Da haben wir hier einen Extrempunkt bei . . . / null komma . . . *zeigt auf K1*
P: Wir können echt . . . mit den Extrempunkten haben wir uns gerade vertan lass uns erst mal gucken
U<: nee das kannst du aber ganz genau sagen \ hier *zeigt mit ihrer linken Hand auf K1* bei null komma fünf *zeigt mit ihrer rechten Hand auf K2* so dann hast du hier *zeigt mit ihrer linken Hand auf K1* noch mal einen bei eins komma fünf haste hier *zeigt mit ihrer rechten Hand auf K2* auch . . . und haste einen *zeigt mit ihrer linken Hand auf K1* . . . da auch *zeigt mit ihrer rechten Hand auf K2* bei drei komma irgendwas . . . alleine von den Extrempunkten würde das schon mal passen \ *legt K1 unter K1a* Dann ist der jetzt hier. . . fällt . . . fallend *zeigt auf K1 mit gerader Bewegung von oben nach unten* hier auch fallend *zeigt auf K2 mit gerader Bewegung von unten nach oben* dann ist der da steigend *zeigt auf K1 mit gerader Bewegung von unten nach oben* hier auch steigend *zeigt auf K2 mit kreisbogenförmiger Bewegung* \ ist der da / *zeigt nacheinander auf: K1 K2 K1 K2*. . . so dann fällt der wieder *zeigt auf K2, x>2* . . . und dann fällt er wieder und dann steigt er *zeigt auf K1 mit gerader Bewegung nach oben*. . . P: Hier wäre ein Wendepunkt bei null \ *zeigt auf K2, erst*

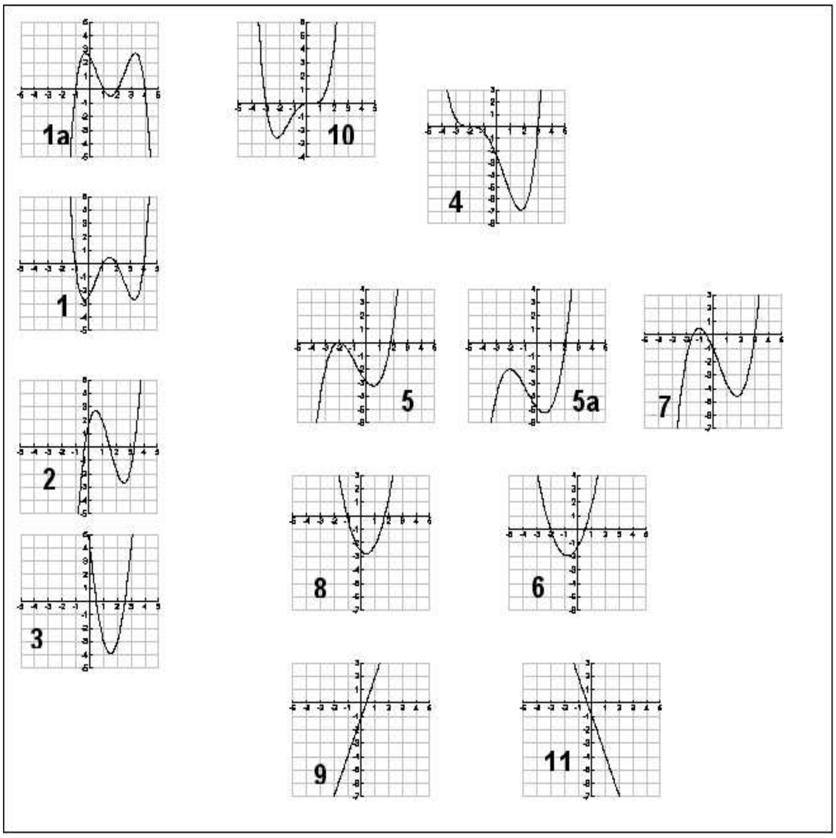


Abbildung E.2: Anordnung der Legeteile von Zeile 53 bis 93

auf Mitte, dann nach rechts und links
U: wieder das stimmt sogar \
P: **Hier** wäre ein Wendepunkt und da ein Wendepunkt *zeigt auf K2* Also/ ...
U<: *murmelt ( )*
P: Ganz langsam war zu schnell
P: Der Graph fällt \ *zeigt auf K1*... also ist die S t e i g u n g im negativen Bereich also ist die ... er fällt also muss ... y im negativen Bereich sein bei der zweiten Ableitung ... *zeigt auf K2*
U: *zeigt auch auf K2* ( ) dann is er hier ...
P: bei null ... *zeigt auf K2* Genau
P: Dann steigt er ... *zeigt auf K2*
P: Stimmt ja auch ...
U: die beiden stimmen ...
P: Dann fällt er wieder ... wobei *zeigt nacheinander auf K1 K2 K1 K2* ... stimmt das denn genau hier / is bei ... *zeigt auf K2*
P: Ja nee... *zeigt nacheinander auf K2 K1*
U: D a *zeigt auf K1 neben Mitte* $x>0$ i s t ein Wendepunkt an dieser Stelle hier *U zeigt auf K1, P auf K2, ungefähr* $x>3$ und hier ist das Extremum *U zeigt auf K2* ... und wieder *U+P zeigen auf K1* Extremum und hier *U zeigt auf K2 mittlere Nullstelle* wieder null *P wechselt von K2 auf K1*
P: Hier steigt er ja wieder *zeigt auf K1*
U: Hier ist er steigend *zeigt auf K1* $x>0$ und deswegen ist er ja auch hier *zeigt auf K2* steigend ... wieder im positiven Bereich
3 sec
P: mmh *zeigt auf K1* Aber *zeigt auf K2 K1* aber der fällt ja hier *zeigt auf K2 im rechten Teil* wieder
U: Aber er fällt ja hier auch *zeigt auf K1,* $x>2$ hier ist er die ganze Zeit fallend *U+P zeigen auf K1*, deswegen ist er *U zeigt auf K2 und wechselt auf K1, P bleibt auf K1*
P<: Fällt er denn an der gleichen Stelle / *zeigt auf K1* Die stimmen auf jeden Fall \ *P schiebt K1a, K 10 und K4 weiter nach oben*
P: Parabel dazu – die dritte Ableitung
U<:äh
P: m ü s s t e ihre ... hmm ... Nullstelle bei null komma fünf ... und zwei komma fünf haben ... Ja *P zeigt auf K2 auf N1 N2, U schiebt K3 darunter*
P: **Endlich** wir haben einen hoffentlich geht er jetzt wieder
U: Jetzt kann man am besten gleich mit denen hier ... da haben wir schon gesagt ... die stimmen ja nicht *zeigt und nimmt auf einmal die drei nebeneinander liegende Karten K5 K5a K7*
P: Haben wir den auch ausgeschlossen / *zeigt auf K4*
U: Äh ... *schiebt K4 zwischen K10 und K5a* So dann hab ich hier a l s o ... einen bei null müsste der bei eins komma neun haben... nee/ ... null bei eins komma neun
U: ... so wie hier *zeigt auf K5* P: hmmhm \ *schiebt K4 zwischen K1a und K5*
P: schieben wir den schon mal

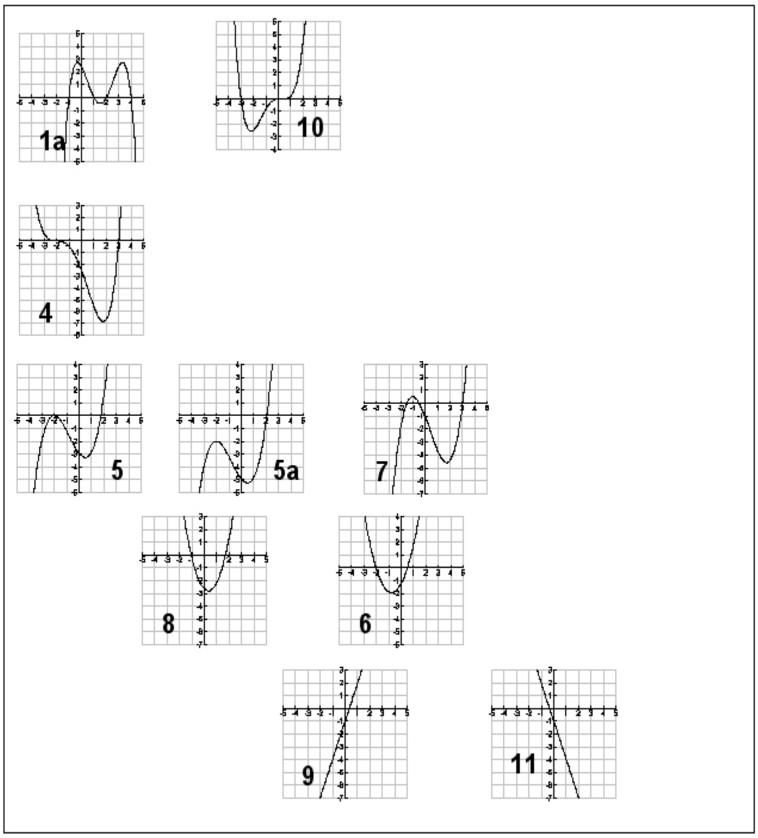


Abbildung E.3: Anordnung der Legeteile von Zeile 93 bis 101

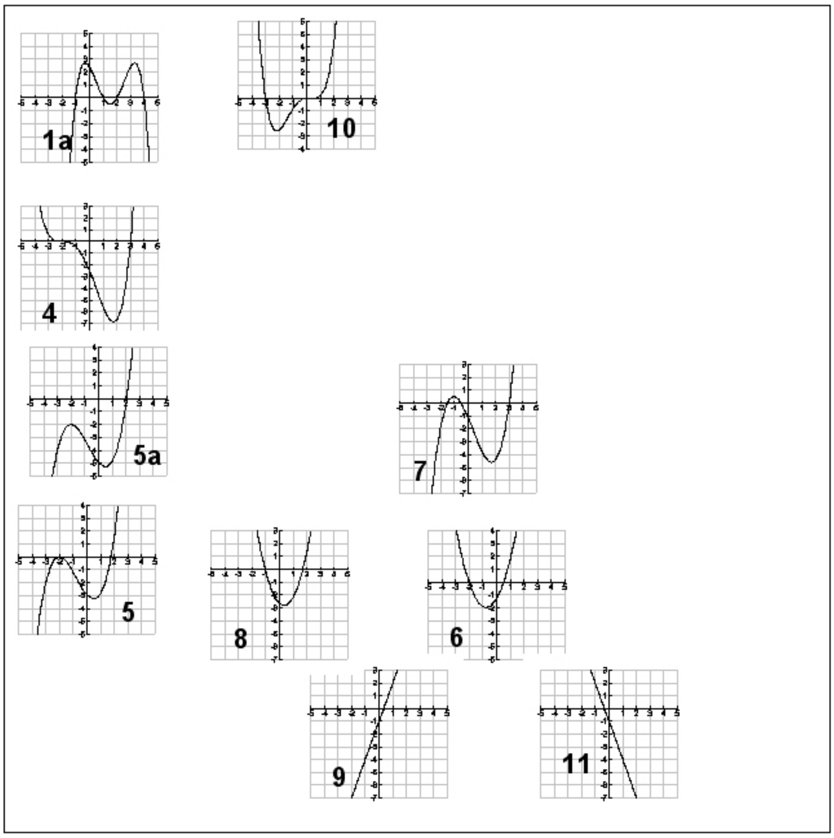


Abbildung E.4: Anordnung der Legeteile von Zeile 101 bis 120

U: u n d null*zeigt auf K5*
U: Und hier auch noch bei zwei *zeigt auf K4 und K5*
U: Gucken wir ob der stimmt und null . . . \ guck mal ob der stimmt *zeigt auf K4* . . . Fallend bis zwei . . . danach wieder fallend bis eins komma neun . . . *zeigt auf K5 im positiven x-Bereich* Ja
P<: hmmhm \ *gerade Bewegung am Graph K4 entlang nach unten* ja dann steigt er müsste er im positiven Bereich sein . . .
U: Ja dann steigt *zeigt auf K4* . . . dann steigt er . . . müsste er hier schon wieder im positiven Bereich sein *zeigt auf K5*
P: Dann steigt er
U: Hier ist er noch fallend ab . . . *zeigt auf K5*
P: Bis null komma fünf . . .
P: Ab null komma fünf müsste er wieder im positiven Bereich sein – ist er aber nicht *zeigt auf K4* also fällt er weiter
P: Und die anderen / *schiebt K5 ganz nach unten und K5a zwischen K4 und K5*
U: Hier muss er wieder zwei und . . . eins komma neun haben
P: null haben . . . hat er aber nicht
P: Ja null haben – hat er nicht *P schiebt K5a wieder weg, U schiebt K4 nach oben*,
P: *schiebt K7 unter K4*
U: Beim ersten am besten noch auf die Extremstelle gucken

P: Wie auf die Extremstelle \
U: Hier auf die Extremstellen gucken . . . da überall wo die Steigung 0 ist *K4*
U: Das ist hier einmal und hier *zeigt auf K4 bei ca. x=-2 und x=1,9*
P: hab ich ja auch gerade
U: Da kannst du schon mal ungefähr sagen welche überhaupt erstmal in Frage kommen dann haben wir jetzt hier *P schiebt K4 nach oben rechts, U schiebt K5 nach rechts außen in die 2. Reihe*
U: ähm . . . also Extremstelle wieder bei eins und bei ähm eins komma *zeigt auf K7*
P: Warum eins / . . .
U: minus eins mein ich minus eins und eins komma neun
P: eins komma neun ja
U: minus eins und eins komma neun *zeigt auf K8* . . .
P: Wendepunkt bei . . .
U: Wendepunkt hier *zeigt auf K7 Mitte* Wendepunkt da *zeigt auf K8 Mitte* – dat stimmt schon mal \
U: und . . . wie is dat jetzt hier /
P: Dann ist der . . . muss äh . . . die Gerade . . . durch den Scheitelpunkt an sich gehen – bei ´ner Geraden bei ´ner Geraden muss. . . also zweite Ableitung is ne Parabel und die dritte Ableitung is ne Gerade. . . dann muss die Gerade durch den Scheitelpunkt der Parabel gehen . . . eigentlich . . . / *guckt zu U* . . .
U: Du kannst ja sagen . . . man kann das ja wieder mit dem gleichen Verfahren gucken . . . wir haben jetzt hier . . . ist der is der Scheitelpunkt \ also die Steigung null is hier

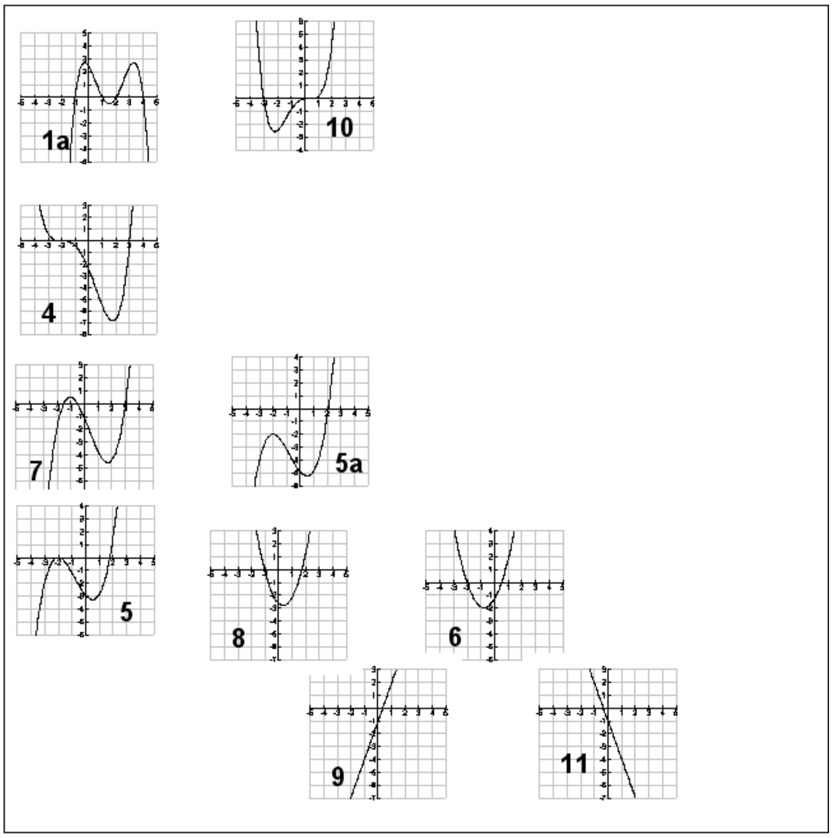


Abbildung E.5: Anordnung der Legeteile von Zeile 120 bis 130

bei eins äh Null komma irgendwas \ *zeigt auf K8* dann muss der hier bei Null komma *zeigt auf K9* irgendwas durchgehen . . . ja der hier . . . du kannst ja sagen, dass das f von x ist \ das ist ja egal wenn du sagst das *zeigt auf K8* ist f von x . . . dann kannst du nach den gleichen Kriterien wieder hierauf schließen *zeigt auf K9*
P: Die da wären /
U: wieder Extremstellen gucken *zeigt auf K8*
U: null komma *zeigt auf K9*
A: zwei
U: null komma zwei oder so meinetwegen . . . also. . . dann gucken wir hier *zeigt auf K9* auch
P: ja da muss die da auch null sein
P: da musst du nach mehr Kriterien gucken, als der ( )
U: Von ´ner Geraden / was sollen wir denn da weiter sagen vielleicht steigend und fallend weiß ich auch nicht wonach man da gehen kann \
P: Auf jeden Fall können wir dann festhalten. . . *P schiebt K 7 auf die bereitliegende leere Tabelle*

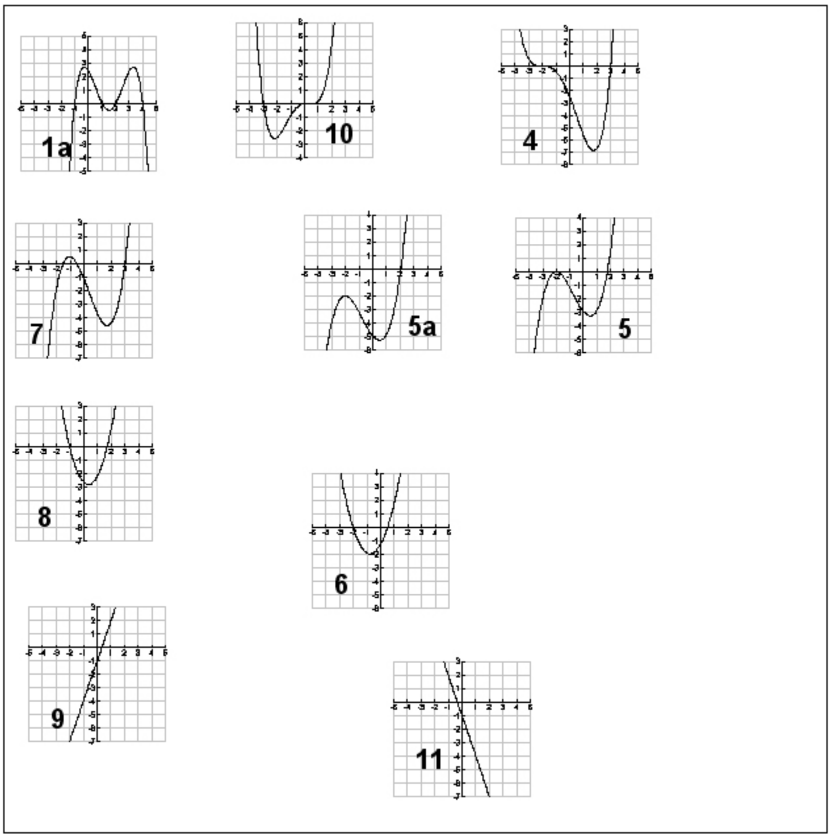


Abbildung E.6: Anordnung der Legeteile ab Zeile 130

A: ( ) hier geht es ins Negative rein hier *zeigt auf K8* geht´s nach oben und da *zeigt auf K9* geht´s so *lacht*
P: Ja *nimmt K7 von der Tabelle zurück*
U: *schnell* Das ist richtig \ hier ist fallend Berg Berg fallend *zeigt auf K8 den Verlauf des Graphen nach* fallend fallend steigend *zeigt auf K9* steigend steigend ist da . . . im negativen Bereich
P: im negativen Bereich
U legt K7, K8 und K9 sortiert auf die Tabelle
P: Hab ich doch gesagt dass wir uns nicht festlegen sollen
U: ähm wieder Extremstelle gucken . . . oder Christian mach du mal \
P: Jetzt können wir eigentlich vom letzten ausgehen weil der muss es ja sein . . . weil es die einzige Gerade ist
U: Ja aber lass mal Christian machen
C: Warum soll ich das denn alleine machen /
A: Sollen wir das zusammen machen /
C: Jo

E.2 Materialien zur Video-Sequenz „Wendepunkt“

Transkript

Es werden folgende Transkriptionszeichen verwendet:
<: sprechen teilweise gleichzeitig
/ bzw.
Stimme wird gehoben bzw. gesenkt
g e s p e r r t: gedehnt bzw. langsam gesprochen
fett: betont gesprochene Wörter
. .. . . . : Sprechpausen
(Wort): eingeklammerte Wörter sind nicht zweifelsfrei verständlich
kursiv: Ausdruck, Gestik, Mimik, Handlungen etc.

S, B, F und L arbeiten an der Aufgabenstellung zu Baustein L – „Lange Leitung“ (vgl. 3). Sie sitzen sich zu zweit gegenüber. B – von der Kamera aus gesehen links mit Gesicht zur Kamera, blonde Haare L – gegenüber von B, Rücken zur Kamera S – neben B, dunkle Haare, Gesicht zur Kamera F – rechts von L, Rücken zur Kamera - kaum zu sehen

B: Ich weiß nicht mehr wie es geht
L: Soll ich einfach mal in diesem Buch nachgucken – das steht doch da – oder/

B: Warte mal . . . Ah er hat´s gemacht – was ich wollte der Rechner
L: Was denn/ Wie hast du das jetzt – was hast du überhaupt jetzt gemacht/
B: Ich habe das eingegeben – die y - Werte – ja \
L: Ja und dann/
B: Dann bin ich
L: Wie meinst du das/
B: Nach hause
L: Aber du hast die markiert gelassen – ja/
B: Ja – auf Home
L: Und dann/
S: Zu Hause *Lacht*
B: Dann hab ich auf F3 ··· und dann
L: F3 ja/
B: F3 ja ··· und dann ··· auf dieses erste und dann hab ich Y1 eingeben
L: Zeig mal B *zeigt L den TR*
B: y1 Klammer zu x Klammer zu
L: Einfach jetzt das da geschrieben/
B: y1 Klammer zu - ne y1 Klammer auf x Klammer zu Komma x Klammer zu
L: Was – versteh nicht – wie du das jetzt machst - y/
B: 1\
L: Und jetzt einfach/
B: Was du da gerade geschrieben hast – das ist für y1 hast du aber y1 gespeichert da hingeschrieben
L: Ja – achso ja *Lachen*
B: Ja – dann ist das jetzt y1
L: Ja – hab ich
B: Dann machst du Klammer auf
L: Ja
B: x
L: Ja
B: Klammer zu
L: Achso – schon wieder zu machen
B: Komma
L: Wo ist denn das/
B: x - Klammer zu
L: Ach schon wieder/
B: Und jetzt gleich – Enter ··· Tadaa ··· Und jetzt – jetzt machst du wieder das gleiche mit F3 – dann schreibst du wieder ... würde ich jetzt mal mit ANS probieren
L: F/ – Wie meinst du das mit F3/ – wie meinst du das mit F3 Bitte/
B: Wieder das gleiche – das gleiche noch mal wie davor und jetzt nimmst du das Ergebnis darein und machst dann die naechste Ableitung dadurch
L: *zeigt auf ihren TR* Das hier – das Ergebnis hier/
S: *nimmt sich den TR von B* Darf ich mal gucken/

B: Ich bin doch noch gar nicht so weit *guckt S zu*
L: Guck mal bitte – ich gebe jetzt das hier einfach wieder runter – damit ist das wieder unten – ja/ Also einfach wieder Enter/
B: Nein – das mein ich nicht
L: Ja was meinst denn du dann/
B: Ich meine *Nimmt sich den TR von L* das ich das nehme *L guckt mit auf TR* da rein jetzt wenn ich ANS drücke - dann hab ich das wieder bekommen
L: *zynisch* Ich sehe alles \
B: Und dann hast du das nochmal abgeleitet/
L: Ja toll – ich habe gar nicht gesehen – wie du das gemacht hast\
B: Ja – ich habe – siehst du doch da *hält L den TR hin* ich hab da ANS –
L: Das kann man doch eigentlich
B: Komma x und dann hast du das noch mal abgeleitet ··· und jetzt –
L: Und dann machst du das immer so weiter/
B: Jetzt kannst du noch mal drücken und dann hast du das glaub ich noch mal abgeleitet und noch mal – dann hast du Null *Lehnt sich zurück* Ist fertig
L: Ach so muss man eigentlich nur Enter drücken/
B: Geil ne/
L: Geil
B: Ja *Macht weiter*
S: *Trinkt etwas und wendet sich zum Nachbartisch* Wo seid ihr denn/
B: Ist mir doch scheißegal wo die sind - so - und fertig *Zeigt stolz ihren TR*
S: Hast du einen Graphen/ *Nimmt sich TR von B*
B: Ne
F: B – dann mach das bitte mal schön
B: Warte ich komm mal zu dir
B geht zu F
F: Ja das funktioniert einfach nicht – ich versteh das nicht
B: Ach so - Das ist jetzt deine Formel
L: B – ich hab jetzt noch so mal ne Frage/ was bringt mir das jetzt eigentlich wenn ich Graphen zeichnen soll/
F: Ich check den nicht
B: Du müsstest die du ausgerechnet hast – alle ersten Ableitungen – die müsstest du jetzt in den Y-Editor speichern und dann wüsstest du wie sie aussehen
B: x – schreib da hin – dann musst du Enter – warum funktioniert das nicht
F: Weiß ich nicht
L: Toll – coole Erkenntnis
L: *Zu F* Guck mal das ist jetzt die Zeichnung zu der Formel – das reicht oder wie/
F: Nein
L: Warum nicht/
F: *liest ab* Und alle ihre Ableitungen
L: Ja aber wie soll ich denn jetzt so eine Ableitung da reinkriegen – auch in Y alle eingeben oder was – och nö

L: Das heißt ich muss mir die jetzt alle raus schreiben/

B: Scheiße · · · Ne – noch mal - das muss ich jetzt auch noch löschen - F3 das geht gerade auch nicht unterschiedlich

F: Mach mal Clear

B: OK · · ·

B: Klappt nicht Warum/

F: Frag irgendwen – Keine Ahnung

F: Lösch am besten einfach alles – dann ist der Speicher noch mal frei

F: guck mal ok nochmal F3

B *geht weg*

F: *Probiert selber* Das finde ich aber nicht nett · · · Ach das ist mir jetzt zu doof

B: Du schreibst es doch jetzt nicht ab – das ist doch blöd

L: Was müssen wir denn da jetzt machen/

B: Ja wir sollen ja jetzt in die Grafik rein nehmen deswegen müsste ich ja alle abzeichnen und das geht da nicht so rein

S: *Nimmt sich TR von B* Den Graphen – mach mal den da rein

· · ·

B: So da ist jetzt der Graph und jetzt sollte der die ganzen Ableitungen mit dem Bild zu zeichnen

L: Guck mal hier das hier – B – Hallo/

B: Ja – Wie hast du das gemacht/

L: Ich hab das einfach eingegeben – ich hab das geschafft das ist die Richtige äh die Erste – dann hast du einfach die Ableitung

B: Aber das kann doch nicht alle sein

L: Das ist bei mir Y1 das steht bei mir alles *Zeigt B den TR* und dann 0.75 das wird bei mir sowieso nicht eingezeichnet irgendwie – 0 auch nicht

B: Doch – das muss doch ´ne Gerade sein

L: Warum – ja aber Null ist doch auf dem Null Dingsbums – oder nicht/ Weil das ist ja Y und so – das kann man ja nicht sehen

B: da haste recht

F: *Zeigt ihren TR* Toll jetzt habe ich auch alles eingezeichnet

B: Bei dir sieht das alles ganz anders aus - Hast du noch alte Zeichnungen da drin/

L: Warum sieht das denn bei mir nicht so schön aus/ *Zu F* Zeig mal bei dir das Y \

F: Das hier ist die ganz Normale ne – Was hast denn du für eine Ableitung/

L: Achso du hast die – die anderen alle – bei mir ist das ja nur die Funktion mit den Ableitungen davon

F: Ja – das hab ich ja auch

F: Nein – das ist die Ableitung – die Ableitung von der hier

B: Ja ne – eigentlich die gleiche – das ist dann nur alles geteilt durch 2 äh durch 3 deswegen – alles geteilt durch 3

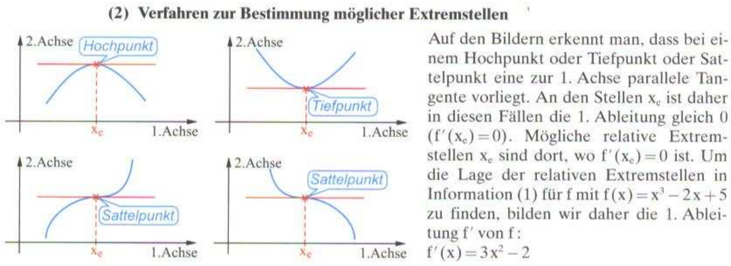
L: Mit dem TR ist das alles anders – ja – dann haben wir das ja alles vollkommen anders – dann geht das ja so gar nicht Hallo/

B: Das ist gekürzt der TR hat alles gekürzt – der hat alles durch drei geteilt

L: Aber dann sind es doch trotzdem nachher andere Graphen
B: Ne
L: Darum muss man das ja so machen wie da
B: Nein
L: Achso ja
F: Was für einen Ausschnitt hast du überhaupt da/ Gib mal deinen Ausschnitt
· · ·
B: *überlegt zusammen mit S und L überlegt mit F*
· · ·
B steht auf
· · ·
B kommt zurück L: Wieso sah man die denn dann eben alle gar nicht auch nicht in dem kleinen Ausschnitt\ Weißt du was ich meine/
L: Ja B – das lag an der Auflösung – hast recht\
· · ·
F: Ähm jetzt hier mit der Tabelle da unten
L: Äh halt müssen wir da jetzt nicht was ins Heft machen/
S: Müssen wir jetzt dazu auch immer so ein Protokoll schreiben/
F: Ja
S: Wie denn/
F: Wie denn/
F: Keine Ahnung – das machen wir zu Hause jetzt machen wir erst mal die Lösung – dann ist das unsere Hausaufgabe – Protokoll darüber schreiben
L: Schreiben kann man alleine Lösungen kann man besser zusammen machen
F: Ja hier die Zusammenhänge zwischen dem Graphen und der Funktion
B: Lass mich mal eben das eine fertig machen
Machen wir das auch noch zu Hause mit den anderen beiden g(x) und h(x) weil wir haben das mit f(x) gemacht
F: Ja schon aber /
B: Ja schon – aber/
F: kannst mal machen, dann guck ich das andere nach *liest vor* Informieren Sie sich darüber, was man unter einem Wendepunkt versteht
F: *schlägt im Buch nach*
F: Der Wendepunkt ist der Punkt in dem die Steigung · · · sich wendet
L: *Guckt in die Kamera* Oh nein – der guckt mich an *lacht*
F: Bin ich froh dass du davor sitzt
Lachen
F: · · · hier Extrempunkte · · · da Wendepunkte
B: Können Sie mir mal helfen/ *(Zu Kamerafrau)*
B: Wenn ich jetzt hier die ganzen Ableitungen ausgerechnet habe – kann ich die irgendwie in diesen y-Editor rüberbringen – dann hätte ich die volle Zeichnung
K: können sie · · · *(wird unverständlich)*
L lacht wegen der Kamera

S: was meinst du denn hier mit/
L: Was/
S: das hier
(ZEIT: 13 20)
L erklärt B
L: Was hast du rausgekriegt/ Wie macht man das/
B: indem du die nimmst die Funktion anklickst –
L: Was anklickst/
B: Ja du nimmst das da runter so dann schreibst du da y5(x) und dann
L: Warte mal ich probier das gerade mal mit irgend so einer aus weil ich ja –
B: Das ist Y5 und dann wo du noch Platz hast und Klammer von x und dann
··· B: Die musst du dann einfach die ist dann einfach da drüben wenn du dir dann y-Editor anguckst dann ist der markiert drüben
L: *Nimmt sich TR* Darf ich mal gucken – warte mal ich komm mal zu deiner Seite
L stellt sich neben B)
B: Hier hier gibst du 0 ein
L: Wo hast du die/
B: Hier von da oben habe ich die
L: Wie – was willst du damit/
B: Die habe ich hier rüber getan
L: Achso ja jetzt ist OK \
B: Also ich habe die 0 angeklickt
L: Ja
B: Haben wir irgendwas eingegeben Da nimmst ···
L: Warte – warte – Da muss ich das hier wieder raus löschen
B: Jetzt hast du doch hier das Falsche gelöscht
L: Nein
B: Das war das Falsche
L: Nein das war richtig
B: Nein das war falsch
L: Werden wir ja sehen
B: OK da schreibst du halt – auf welchem Teil möchtest du das rechnen 8 – 6 oder 7/
L: 5 – ne haben wir schon – 6
B: Enter und jetzt das bei ··· ach ne ist das Falsche weil das hast du da schon – so aber du wolltest mir ja nicht glauben
L: Nein ich hab da nur eben – ich hab gedacht du hättest das von hieraus irgendwie gemacht ja – und dann hab irgend so eine reingegeben und dann hast du – weil die haben wir doch schon da alle eingegeben selber
B: Ja – ich hätte –
L: Ja das kann ich doch
B: Ja ist gut
L geht wieder an ihren Platz zurück
···

F: *guckt ins Arbeitsheft* mit dem Wendepunkt nee/
L: Was für´n Wendepunkt /
F: *liest vor aus dem Arbeitsheft* Informieren Sie sich, was man unter einem Wendepunkt versteht
L,S: Ja
F: Ja hier in dem Buch *liest aus dem Schroedel-Buch und zeigt auf die Graphen (Abbildung E.7)* steht was man unter einem Wendepunkt versteht


(2) Verfahren zur Bestimmung möglicher Extremstellen

Auf den Bildern erkennt man, dass bei einem Hochpunkt oder Tiefpunkt oder Sattelpunkt eine zur 1. Achse parallele Tangente vorliegt. An den Stellen x_e ist daher in diesen Fällen die 1. Ableitung gleich 0 ($f'(x_e)=0$). Mögliche relative Extremstellen x_e sind dort, wo $f'(x_e)=0$ ist. Um die Lage der relativen Extremstellen in Information (1) für f mit $f(x)=x^3-2x+5$ zu finden, bilden wir daher die 1. Ableitung f′ von f:
$f'(x)=3x^2-2$

Abbildung E.7: S.192 in [Griesel/Postel 1999]

S;L: Ja
F: – also ein Wendepunkt ist auch ein Sattelpunkt \
B: Mei wie schön (· · ·) *guckt auf TR-Bildschirm und zeigt ihn dann zu F*
F: *zu B und guckt auf deren Rechner* Jaaa, jetzt sieht´s gleich aus
L: *zu F* Oder ein Hoch- und Tiefpunkt
F: *zu L* **Nein** Hoch- und Tiefpunkt ist was anderes · · · Sattelpunkt
S: *zu B während sie B´s Rechner in der Hand hält und betrachtet* ist das Funktion/· · ·
F: **Nein** · · ·
L: *zu F* Ja hab´ jetzt hab ich es ja gesehen
L: Och · · ·
F: Ja Mensch· · ·
F: Und aber das ist genauso wie bei den Hoch- und Tiefpunkten dass da an der Stelle die Steigung oder die 1. Ableitung also die – also Steigung null ist
B: Ja
S: Ja
L: *guckt zu B* Ja
L: Tangente gleich null also m t null
B: · · · bei dem Wendepunkt ist es wie bei den
F: Das da an der Stelle die ähm
B: Ja
F: die Steigung 0 ist
S: habe meinen Bleistift verloren ...
B: Ah – jetzt das ist da wo

L<: Dann ist das dann hier *zeigt auf einen Punkt auf ihrem Rechnerbild*
B<: *setzt fort* das halt da wo von einer Rechtskurve in eine Linkskurve übergeht
S: Ja
F: Ja genau
L: Ja
L: wenn ich jetzt finden würde, wo das **hier** nochmal war *guckt auf ihren Rechner, zeigt auf einen Punkt und lehnt sich zurück* ··· *zu F* hier war das doch/
S: sollen wir das da aufschreiben/
L: *guckt auf ihren Rechner* dann ist das ja mal da tief und mal hoch nee \ *Zeigt im Heft*
L: Dann isses doch bei der hier / *zu F* guck mal bei der hier dann da/ und
L: Nein nee/
F: Nein nicht da oben\ da oben ist der Hochpunkt
L: Ja aber das geht doch da noch weiter oder nicht
···
F stockt und guckt ins Buch
L: Das hier ist doch so ein Sattelpunkt – da und da oder nicht/ so ein Wendepunkt da geht es wieder runter und da wieder hoch *macht U-förmige Handbewegung am Rechner, stockt am unteren Minimum*
B: Das ist so wie bei der einen Aufgabe die wir gemacht haben – da mit der Produktion *(vgl. Abbildung E.8)* da war das ja auch so –
F: Ja - **da** war es so

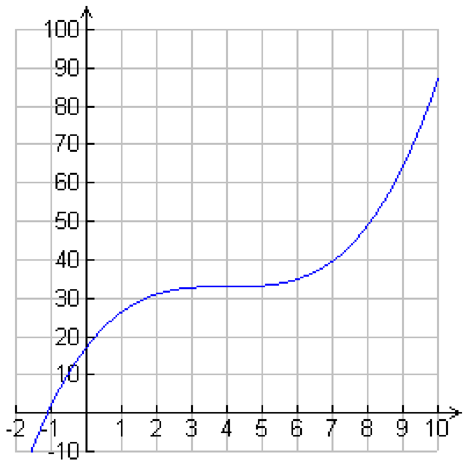


Abbildung E.8: Produktionsaufgabe aus dem vorherigen Unterricht

B: da war es ja auch so ein Wendepunkt weil das auch ja auch nur **einer** war
L: Ja – ok

· · ·

Zeit: 1819

F: *diktiert – alle schreiben* Definition, nee Quatsch nicht Definition · · · Ein Wendepunkt · · · auch Sattelpunkt genannt · · · wird ermittelt indem man die Steigung der Funktion oder erste Ableitung *Gong fürs Stundenende* gleich Null setzt \ An dem Wendepunkt · · · ähm wechselt die – Weiß jetzt nicht wie ich das formulieren soll – wie kann man das schöner formulieren das steht nicht da – B – du hast es eben gesagt/

B: Krümmung der Funktion von rechts nach links *zeichnet mit dem linken Arm eine Bewegung von rechts nach links*

F: Du drückst das sehr mathematisch aus\

B: Die hat gesagt – wir sollen das so ausdrücken – dass wir das verstehen können\

S: Können wir nicht einfach sagen die Richtung – weil von rechts nach links stimmt ja nicht – kann ja auch andersrum sein

F: Das war ja nur ein Beispiel von links nach rechts\

F: So wir haben Pause warum melden die sich dann nicht/ Keiner hat die Klingel gehört – außer mir

L: Doch – ich hab es gehört

S: Ich auch

· · ·

S: Wollen wir hierzu auch ein Protokoll schreiben – haben die anderen alle gemacht\

F: Ja echt/

S: Wer weiß – vielleicht können wir ja Nicole fragen

F: Wem gehört denn das Blatt hier/

S: Mir

F: Kannst du das mal wieder wegtun – damit ich meine Aufgaben sehe

S: Ne – kannst du vergessen

F: Ich find das so doof was wir hier u n t e n machen sollen – den Grad der Funktion – MaxAnzahl Nullstellen – MaxAnzahl Extrempunkte – MaxAnzahl Wendepunkte

S: Ja aber - woher weiß man das denn/

F: Ja weiß ich eben auch nicht

L: Aber das mit dem Grad das ist hier

F: Was ist überhaupt Potenz/

· · ·

L: Ja – guckt mal hier – was ist denn so eine x Potenz – weißt du das/

B: *Guckt in die Kamera – dann zu S* Ich fühl mich so beobachtet

F: Eine x-Potenz

L: Ich weiß nicht was eine x-Potenz ist

· · ·

S: · · · dein T-Shirt ist dreckig

· · ·

S: *Ruft nach der Lehrerin* Frau· · ·

S: Und jetzt/

B: Ich bin noch nicht ganz fertig– ich bin so langsam
F: Ist die höchste vorkommende x-Potenz
B: He – warte ich habe da irgendwie raus – dass das nur –
L: Guck mal wenn da x hoch 4 steht ist das vierten Grades und wenn da x hoch 2 steht ist das zweiten Grades
S: Ja
F: Ja toll
ZEIT: 22 37
L: Damit haben wir das schon mal mit dem Grad geklärt – Grad eins der Funktion – dann musst du die erste Ableitungsfunktion da hinschreiben ···
F: ok Ich würde einfach mal weiter lesen
L: Das ist gar nicht die 1. Ableitung
S: Hat noch jemand ein kariertes Blatt für mich/
L: Vielleicht kannst du das Blatt mal umdrehen\
S: Was/ – ich schreibe nicht auf Rückseiten ···
F: Du schreibst das doch nachher noch mal schön/ Oder nicht/ Du bist eine Verschwenderin
S: *Zu B* Machst du auch nicht
B: Nö – mach ich auch nicht
F: Ja dann machen wir doch so eine Wertetabelle
S: Sollen wir die so längs machen – vielleicht ist das praktischer – weil man muss ja auch noch die Funktion da hinschreiben
L: Können wir nicht mal – Hallo – Die Fünf-Minutenpause haben wir nicht mehr oder was/
S: Ne – kannst du knicken \
B: Ne– das muss nicht– man sieht dann – wie wir faulenzen
Lehrerin kommt dazu
F: Kann man da auch raus schneiden
ZEIT: 2410
Gong
B: Welche sollen wir jetzt nehmen/
S: Du musst alle nehmen – oder/
F: Eigentlich sollte man eventuell die Funktion dazu schreiben
B: Ja welche denn/
F: Die drei
B: Die drei – mit den drei das machen
S: Welche drei – die oberen drei oder unteren drei
F: Die unteren drei
S: Sicher/
F: Ja
L: Ja doch – weil das ist bestimmt schöner
B: Macht viel mehr Spaß
S: Ja bestimmt

B: Ja – ich schreib auch heute mal auf der Rückseite – weil ich kein Blatt habe und ich auch nicht schnorren will
F: Ich will das Blatt wieder haben
S: Ich gebe dir auch die Blätter wieder – ja – das sind schon zwei
L: Das ist ein Ordner – da würde ich nicht Nein sagen
F: Ne – ich möchte ganz bestimmt kein Blatt von dir wieder haben
· · ·
B: riecht dann nach Knoblauch
S: Das passt auch nicht mehr
B: Das sind doch nur drei Stück
Alle zeichnen Tabellen
L: Wieso können wir eigentlich nicht mal so ne leise Musik nebenbei hören – das fände ich ja mal cool oder nicht/
S: Natürlich
L: Ich mein weil wir arbeiten ja trotzdem · · · sehr diszipliniert
F: Also Grad der Funktion: Das erste ist eine Funktion 3. Grades – die zweite auch und die dritte ist ne Funktion 4. Grades
B: Genau
L: Wie schreiben wir das auf/ Also wir schreiben Grad der Funktion - f(x) = 0.125 x hoch
Alle zeichnen und schreiben
ZEIT: 2616
B: Ich kann nicht schreiben
S: B – kriegen wir morgen die Bio-Arbeit wieder/
B: Das find ich irgendwie blöd - Kann ich vielleicht doch ein neues Blatt haben/
F gibt ihr eins
L: Solinger weißte – typisch
S: Keine Diskriminierungen bitte
L: *Zu F* Ja weißt du wie die fahren – Auto fahren – das ist so ätzend
L: Solinger Autofahrer sind die schlimmsten
S: Guck dir mal Leute an – die aus Mettmann kommen
L: Ja – Mettmanner Menschen sehe ich nicht so oft – aber trotzdem sind Solinger einfach nur übel
S: Ich wollte wissen ob man hierzu – da muss man doch eigentlich nur
Lehrerin geht zu S
S: Ähm – da muss man ja immer nur wahr oder falsch hinschreiben. Sollen wir dann trotzdem so ein Protokoll dazu machen/
Le: Was könnte man denn da hinschreiben in so ein Protokoll/
S: Ja weiß ich auch nicht
B: Dass das eine wahr war und das andere falsch war
S: Dann müsste man ja auch wieder die Graphen abzeichnen
B: Nö – das finde ich einfach unnötig
Le: Man könnte auch begründen – warum man sich dafür entschieden hat – also die

Graphen sind ja schnell gemacht
L: Aber da jetzt –
B: Das sind zu viele – voll viele und total unnötig
Le: Ja – das weißt du doch noch nicht ob das total unnötig ist.
B: Doch
L: Aber ich würde wirklich sagen – das ins Heft zu machen ist echt viel Arbeit ··· – da würde ich lieber weiterarbeiten
Le: Ihr könntet das ja auch aufteilen – dass ihr z.B. sagt also die gehen z.B. hin und teilen die Dokumentation auf – besprechen sie gemeinsam und einer erstellt sie ···
L: Ja – das geht auch
Le: Könnt ihr ja mal für euch überlegen – wie ihr euch das einteilt
S: Ja
B: Gut
Lehrerin geht wieder weg B: Wir dokumentieren die erst – wenn wir 4 Aufgaben jeweils fertig haben - dann kann jeder eine Seite – also so einen Baustein dokumentieren und dann kopieren wir die einfach nur und fertig ist es
···
S: Wir sind toll - Ich würde gerne den hier dokumentieren weil den habe ich verstanden
F: *Zeigt B ihren TR* Guck mal – da ist so ein komisches Zeichen/ X gleich Minus irgendwas
B: Das ist unendlich
L: Was denn – zeig mal
F: Hat unendlich viele Hochpunkt und Tiefpunkt/
L: Hallo
B: Ich weiß nicht – für mich ist dieses Zeichen unendlich – aber ich bin mir da nicht so sicher
L: Aber das ist doch das mit der liegenden Acht – ne/
S: Die liegende Acht – ja
B: Ja – die liegende Acht ist doch unendlich – oder/
F: Mal ne andere Frage – wie rechnet man die Extrempunkte aus mit dem TR/
B: Das sind doch die Extrempunkte
F: Bei mir steht nur fmin oder fmax
B: Ne – die gehen ja unendlich nach oben und unten
F: Also gibt es keine
B: Doch Extrempunkte sind ja diese Hoch- und Tiefpunkte
F: Ja – das will ich ja
B: Die berechnest du auch mit $m(t) = 0$
F: Ja ja – aber mit TR
L: Guck mal B –
B: das ist doch ganz logisch die –
B: Ja/
L: M a x i m a l e A n z a h l d e r N u l l s t e l l e n - was meinen die eigentlich mit maximal/

B: Ja eine Funktion 3. Grades kann ja maximal drei Nullstellen haben
F: Wieviele Nullstellen/
L: Ach so meinen die das/
B: Und eine Funktion 5. Grades
S: hat fünf NS
B: Deswegen müssen wir auch gar nicht die Funktion dazu schreiben – sondern einfach nur schreiben: Eine Funktion 1. Grades kann maximal so viele Nullstellen haben – maximal so viele Extrempunkte – und so viele Wendepunkte
F: Ah
B: Haaa/
S: Super
F: Tadaa\
L: Bei den beiden ist das immer das Gleiche – d.h. maximal drei Nullstellen
B: Wo haben wir das aufgeschrieben/
L: Hallo/
F: War das mein Geodreieck/
L: Ja – vielleicht
· · ·
L: Also hier- Hallo/
S: Woher kriege ich das raus/
ZEIT: 3111
B: Leute wenn wir jetzt anfangen
L: Hallo – ich muss jetzt doch einfach hier nur hinschreiben also ich muss nur noch mal nachfragen – ob das auch richtig ist - maximal drei Nullstellen und max
B: zwei
L: Wieso Extrempunkte – was ist das überhaupt/
B: Extrempunkte sind das wo diese Wendepunkte sind *macht eine Handbewegung wie Buchstabe M*
L: Achso – da wo das am höchsten ist oder was/
F: *zu B* **Nein** – eben nicht die Wendepunkte \
B: Ne – nicht die Wendepunkte *zeigt mit dem linken Arm erst ganz hoch dann ganz runter*
S: der Punkt, wo es am höchsten und am tiefsten ist *macht Handbewegung extrem nach oben und extrem nach unten und malt auf den Tisch und stockt*
B: der hoch und am tiefsten ist, nicht Wendepunkte das ist ja bei dem hier der Fall *malt auf den Tisch, Bewegung von Hoch- und Tiefpunkt, dabei stockt sie*
S: Dann kann es ja nur zwei haben oder immer · · · oder nicht/
B: Ja aber das sind doch auch automatisch rechts – *bei gleichzeitiger Handbewegung eines Hochpunktes, stockt*
F: Ja – aber was die gemeinsam haben – ist dass ähm die Steigung da Null ist
B: Ja wie – wie rechne ich jetzt das eine aus und das andere aus – das ist doch eigentlich das Gleiche
F: Ja das ist hier die große Frage/

B lacht

F: Das ist doch erklärt – an den Stellen, wo die ähm die erste Ableitung – blablabla – blabla *F schlägt im Buch nach*

F: Ich hab´ die Seite verschlagen

L: *macht F nach* blablabla

F: Ich hab´ die Seite verloren *F findet die entsprechende Seite und reicht sie zu B, Verweis auf Abbildung E.7 Jede liest im Heft oder Buch*

L: Bei der X hoch vier sind das maximal vier Nullstellen – oder/ vier Nullstellen oder nicht/

B: *zu F* Ja – Hochpunkt und Tiefpunkt

F: *zu B* Ja und Wendepunkte

L: Ich find das blöd – dass mir keiner hier ne Antwort gibt - maximal vier Nullstellen hier bei der letzten – weil das ist ja X hoch vier ist/

F: Ja – aber wir sollen das doch jetzt allgemein machen

B: Ersten Grades zweiten Grades dritten Grades

F: Das kannst du ja dann ins unendliche fortsetzen – mit 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

L: X hoch zehn – rechnet das irgendwer/

F: Bis sechs reicht es reicht nicht schon bis vier

B: Das wendet doch da auch von einer Rechts- in eine Linkskurve – also muss es doch da ein Sattelpunkt sein – *zeigt auf Abbildung E.9*

F: Nee

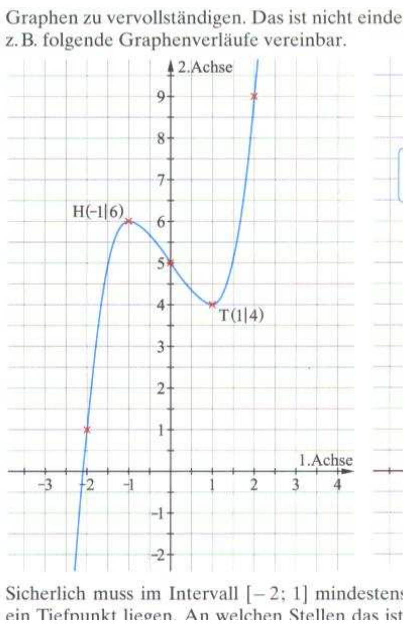


Abbildung E.9: Grafik aus dem Schulbuch [Griesel/Postel 1999], S.192

B: Das mit der Rechts- oder Linkskurve ist eh Scheiße – was wir erzählt haben
B: Das ist doch nur da so – aber da ist es· · ·
L: Wie bei Formel Eins ne/ – erst nach rechts dann nach links
S: Es wechselt doch einfach mal die Richtung
B: Ja wie auch immer das mit den Kurven und dem Wechsel – das ist
B: Aber das wäre ja hier auch so von den Kurven da wechselt es ja auch *zeigt ins Buch auf Abbildung E.7*
L: Was überlegst du eigentlich gerade – ich versteh das irgendwie gar nicht
B: zum Beispiel das – was hier an diesem Punkt hier ist
L: Ja – das ist der Schnittpunkt mit der y-Achse
B: Genau – und wie ist denn dort die Tangentensteigung/
F: Gibt es überhaupt ´ne Funktion 1. Grades/
L: Ja die Tangentensteigung hier – Hallo – Hörst du mir mal zu bitte – die müsste doch eigentlich hier so anliegen – oder nicht/
B: Dann würde die genau da lang gehen – dann wäre da ja keine T a n g e n t e mehr
L: Warum/
B: Weil eine Tangente das ja nur in einem Punkt berühren darf
L: Nee muss nicht sein – kann auch mehrere Punkte berühren
ZEIT: 3415
B: Ne – dann ist es keine Tangente mehr
L: Doch
B: Nein – dann ist es eine Sekante
L: Aber die Frau
B: Aber die kann die auch durchstoßen
L: Ja dann durchstößt du die halt
S: Wenn du eine Parabel hast – dann ist hier ein Punkt – dann kann die so dadurch gehen – dann berührt die die aber nicht mehr
B: Zum Beispiel hier durchstößt die die hier und ob das halt bei der fünf auch so wäre · · ·
L: Wenn du die so anlegst – dann kann die die nur an einem Punkt durchstoßen und dann ist das ja nur hier
B: Dann durchstößt du die doch nicht – du kannst die so durchstoßen oder so durchstoßen
L: Warum nicht/ So auch
B: Weil – es geht doch nicht um den – es geht um Punkt fünf
B und L zeigen im Buch auf einen Graphen
L: Ja aber die geht doch dann da rein
B: Die darf die doch nur in dem Punkt berühren
S: Ich weiß es nicht
L: Ja machst du die halt so von da unten irgendwie so
S: Wie kriegt man diese Extrempunkte raus und die Wendepunkte /
L: Ich weiß noch nicht mal – was so ein Extrempunkt ist – ist das jetzt so ein Hochpunkt und Tiefpunkt/ Ja,nee/

S: Ja\
B: Ich wollt zum Beispiel wissen, ob das da *zeigt auf den Graphen Abbildung E.9*
S: jaha
B: Das ist zum Beispiel da ein Wendepunkt weil das von d e r Kurve *zeigt mit dem Stift am Graphen in Abbildung E.9 einen Bogen um den Hochpunkt* in d i e Kurve *zeigt mit dem Stift am Graphen einen Bogen um den Tiefpunkt* übergeht – ne/
F: Ich weiß überhaupt nicht warum du damit ein Problem hast
B: Aber da ist die Steigung ja gar nicht Null
S: Das stimmt aber ich finde auch eher – dass Wendepunkte· · ·
B: sind das und das *zeigt am Graphen in Abbildung E.9 auf die beiden Extrempunkte*
F: Ne der Wendepunkt ist **da**\
B: Ja – das meine ich ja – aber da ist ja
S: Nein – das ist **kein** Wendepunkt – ab da *zeigt auf den Hochpunkt* wechselt es ja die Richtung und da *zeigt auf den Tiefpunkt*
B: Da *zeigt auf den Hochpunkt* wechselt es einmal da oben – aber ab da *zeigt auf den Wendepunkt* wechselt es doch auch
S: Nein
B: Natürlich von d e r Kurve *zeigt mit dem Stift am Graphen in Abbildung E.9 einen Bogen um den Hochpunkt* in d i e Kurve *zeigt einen Bogen um den Tiefpunkt*
F: Ja
S: Nein – das ist h i e r *zeigt auf den Hochpunkt*
B: Das ist doch so – als wenn er so fährt *zeigt Bogen um den Hochpunkt bis zum Wendepunkt* und dann fährt er nach dort *zeigt ab dem Wendepunkt Bogen um den Tiefpunkt* – eine Kurve nach dort – eine nach hier
S: Hier so – wenn es nach da *zeigt auf Hochpunkt* wechselt geht es runter und da *zeigt auf Tiefpunkt* geht es wieder hoch
B: Aber es geht ja da - wenn du es ganz extrem darstellst geht es so und dann wieder so – dann ist es dieser hier
L: Soll ich dir mal ein anderes Mathe-Buch holen/
B: Ja
L: Welches hättest du denn gerne/
B: Weiß ich nicht
F: Das Cornelsen Ding
B: Ich möchte das haben was dazu passt – auch mit dem LS drauf
F: Das Cornelsen
B: Nein – das andere
L: *Steht auf* Ich bring euch beide
B: Ja dann halt nicht – aber das sieht passend dazu aus
L hält B beide Bücher hin – B nimmt das Klett Buch mit LS
L: Das ist das Klett
B: Ja ich wollte ja auch das Klett haben
L nimmt Cornelsen-Buch
B: Hier

S: Extremstellen
B: Ich habe das auf einen Griff aufgeschlagen – das ist mir sympathisch
S: Das sind die ··· *zeigt auf die beiden Extremstellen im oberen Graphen von Abbildung E.10*)
B: Ah ··· guck mal da sieht man´s auch, dass es nicht da ist *zeigt auf den*

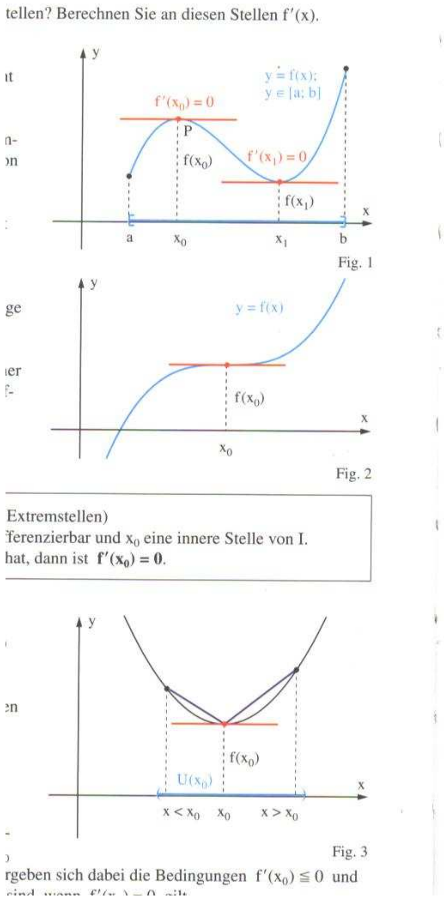


Abbildung E.10: Grafik aus dem Schulbuch [Baum u.a. 2000], S.138

Sattelpunkt im mittleren Graphen von Abbildung E.10)
S: Ja ··· weil das doch ···
B: Ja, weil da von ´ner Rechts- in ´ne Linkskurve übergeht
S: N E I N
B: Ok – dann ist es nicht so – dann hat es auch nur die beiden Punkte ok
S: Man mann mann ich hab mal was gegen Britta in Mathe richtig
ZEIT: 3728
S: Möchtest du das beschlagnahmen/
B: Ne – ich bring das gleich wieder zurück

L: Ja aber B hat's doch schon rausgefunden
F: Das sieht ja geil aus – Steffi hatte recht - so krass so hoch/
L: Ja aber guck mal
L gibt Buch zu S L: Ihr konntet das gar nicht nachvollziehen
S: Super
B: Da unten kommt das raus mit Null
L: Wo die erste Null
B: Ich brauch das nicht
L nimmt sich Buch von B und bringt beide Bücher weg
S: Ja null - ist das überall Null/
B: Ich will das eben gucken *Zu F* Wir können doch einfach eine da eingeben
F: Ja – das tue ich ja
B: Also – wir machen das jetzt erst für sechs/
F tippt in TR ein
ZEIT: 3846
L zeigt auf die 0 in der 1.Zeile und 3.Spalte:
L: Warum Null/
B: Weil es eine Gerade ist\
L: Aha
B: Und der Extrempunkt ist ja automatisch Wendepunkt – oder /
S: Nur einen Extrempunkt – weil es eine Parabel ist
B: Und auch einen Wendepunkt
S: X hoch drei ist so *Zeichnet in der Luft Form des Graphen zu* x^3
B: Die hoch drei hat drei Nullstellen maximal – zwei Extrempunkte
L: Und zwei Wendepunkte –
L: Ne ... einen Wendepunkt\
B: Ne – zwei - der oben und der unten
L: Ich dachte die hat nur einen Wendepunkt
B: Ne – das war ja falsch. S hatte Recht – dass da oben ist ein Wendepunkt – bei der fünf war überhaupt gar nix
L: Also sind das doch zwei/
...
L: Also sind das bei der Vier drei - dann kann man das doch einfach so runter schreiben – oder nicht/
Alle vier füllen die Tabellen in den Heften aus
B: Ja
F: *Zeigt Rechner mit dem Graphen zu* x^3 Wo habt ihr denn da bitte schön zwei Wendepunkte oder zwei Extrempunkte - hat die nämlich gar nicht/
B: Ja aber maximale Anzahl - die ist ja auch blöd
L: Ja – das wundert mich auch schon
B: Die ist ja blöd das Beispiel
F: Das ist aber X hoch drei die hat keine zwei Hoch- oder Tiefpunkte
B: Ja – die hat ja auch keine zwei Nullstellen gedehnt

F: Aber ihr habt ja gemeint: 1 – 2 – 3 – 4 – 5 und so weiter
B: Ja die maximale Anzahl
F: Ne
B: Doch
...
B: Können wir das nicht mal eben so -
F: Ja – das geht nicht – die hat nämlich keine -
L: Aber maximale Anzahl ... dann rechnen wir ja allgemein
...
F:Allgemeine X hoch drei - Funktion 3. Grades
B: Ja – aber die - normalerweise ist das einfach eine *Schlägt im Buch nach* Wo war das denn auf welcher Seite mit den Extrempunkt/ *schlägt das Schrödel-Buch auf und bleibt bei Abbildung E.11 hängen*
L: Ne ne ne hier –

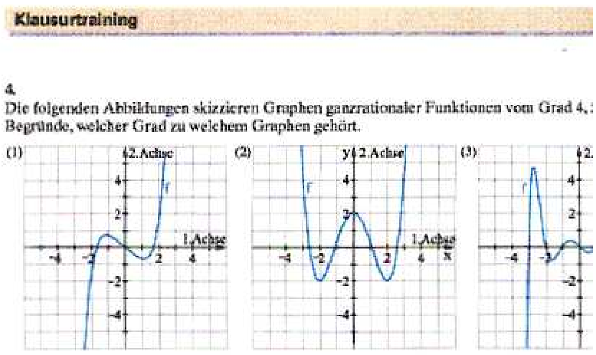


Abbildung E.11: Seite im Buch, die B in Zeile 664 betrachtet

B: Hier – das ist eine Funktion 3. Grades *zeigt auf Graph (1) im Buch*
F: Ja
B: Dann hat die doch da einen Extrempunkt und da einen Extrempunkt und dann doch auch automatisch da einen Wendepunkt und da einen Wendepunkt
F: Wer sagt denn – dass das eine Funktion dritten Grades ist – das ist nämlich vierten – fünften und Funktion vom Grade vier
B: Mann – die sieht doch so aus glaub mir doch
F: Nein
B: Das sah doch auch in der Mathe-Klausur so aus – oder das hier *Zeigt S etwas*
F: Glaub dir aber nicht
L: *Zu F* Du musst die Auflösung größer machen
B: Ja es gibt ja auch Ausnahmen – das ist ja die maximale Anzahl – es kann auch sein – dass das so ein Sattelpunkt ist - dann gibt´s nur eins\

. . .
S: Was/
. . .
S: *In die Kamera* Möchten Sie nicht noch andere Leute aufnehmen – das ist doch langweilig oder/
K: Vergessen sie es doch einfach\ Das ist überhaupt nicht langweilig – das ist doch so spannend mit den Wendepunkten
B und andere: Spannend/ *lachend*
K: Ja was stimmt denn jetzt/
B: aber eine Funktion dritten Grades sieht doch so aus/
Alle reden unverständlich durcheinander
K: Ich kriege nicht alle Argumente mit
K: Ja genau - also es kann so aussehen – weil sie *(zeigt auf F)* hatte eben etwas anders
B: Die muss ja keine zwei Extrempunkte haben – das kann ja auch so ineinander übergehen – das ist ja dann ein Sattelpunkt\
K: Ja
B: Aber die maximale Anzahl sind ja dann zwei
K: Ja – ist richtig - und die Wendepunkte/
B: Ja – Wendepunkte sind ja die hier *Zeigt auf Extrempunkt*
K: Wie viele Wendepunkte/
B: Ja zwei
K: Zwei/ *Zeigt auf F* Sie sagt einen – oder/
B: Ja – aber
K: Begründen Sie mal
L: Ja einen – wenn das so ein Sattelpunkt ist – wie bei ihr\ Die hat ja auch nur einen Extrempunkt gehabt
K: Gibt es einen Extrempunkt bei der/ *(zeigt auf Graph von* x^3 *auf F´s Rechner)*
B: Keinen Extrempunkt und einen Wendepunkt
L: Ja
K: Mit welcher Begründung haben Sie da einen Wendepunkt/
B: Ja weil die Richtung ändert
K: Welche Richtung/
B: Weil sich die Kurve ändert von links nach rechts
K: *Zu F* Zeigen Sie mal
F zeigt ihren TR K: Achso ja
L: Die hat einen Wendepunkt
K: Da ist nur ein Wendepunkt/
B: Ja
K: Da sind Sie sich schon mal einig/
K: OK
B: Ja klar
K: Und wie viele Wendepunkte hat die/ *Zeigt in B´s Heft*

B: Ja zwei und auch zwei Extrempunkte
K: Also 2 Extrempunkte ist einfach – ne/
L: Aber die hat doch nur einen Wendepunkt in der Mitte – oder nicht/
B: Ja das haben wir uns auch gedacht – aber das steht ja nirgendwo – deswegen -
S: Was liegt in der Mitte/
K: Moment – Sie haben schon so viel richtig zusammengetragen. Mit dem was Sie jetzt genannt haben können Sie das jetzt auch lösen - das Problem Also zwei Extrempunkte sind klar
B: Ja
K: Das ist auch allen klar was ein Extrempunkt ist *(Nicken der vier Schülerinnen)* - das sind diese beiden\ Es geht wirklich nur um den Wendepunkt\ Jetzt haben Sie eben gesagt – da wo die Kurve ihre Richtung ändert\ Jetzt sagen Sie mir mal bitte wie oft ändert sich – wenn Sie jetzt hier meinetwegen mit dem Fahrrad entlangfahren
B: Meiner Meinung nach dreimal – weil das doch hier nochmal ändert...
K: Fahren Sie mal von hier aus mit dem Fahrrad los
B: Ja dann bieg ich da ab – dann fahr ich geradeaus ··· lang···
K: Moment – Moment Welche Art von Kurve ist das wenn wir jetzt von da kommen/
B: Das ist voll irritierend
K dreht das Heft um
B: Eine Linkskurve
K: Eine Linkskurve
B: Dann eine Rechtskurve
K: Bis wohin geht die Linkskurve/
B: *Zeigt ins Heft* Bis da
L: Nein – die Linkskurve geht bis da wenn du ganz lang gefahren bist und da kommt dann erst die Rechtskurve
B: Ja eigentlich schon
L: Ja natürlich
F: Ja – also ist da nämlich doch da in der Mitte /
L: Ja eben
B: Ok
K: Sehen Sie – Sie brauchen mich gar nicht
S: Oh Mann
B: Und dann ist das da jetzt null *Zeichnet in der Tabelle*
S: Ich habe ja auch von Extrempunkten geredet
B: Dann ist das null – dann ist das eins – dann ist das da nämlich zwei
S: Wo ist das null/
B: Bei der Parabel
L: Ist das hier /··· ne bei den Extrempunkten bleibt das so – oder/
S: Also bei Funktionen - welcher/ vierten Grades/
K: Sonst hätte ja eine Parabel auch einen Wendepunkt
B: Ne – das hatten wir ja auch so
K: Achso – dann ist das ja jetzt klar

S: Funktion vierten Grades hat zwei – oder/
B: Ja ist ja dann logisch
S: Wendepunkt bei fünften Grad
F: Oh
B: Also von der Logik her – müsste die drei haben\ vier Maximalstellen und drei Wendepunkte
L: Wo bist du - bei der fünften / vier und drei – ja
B: Ja das müssen wir noch mal nachprüfen abzählen
F: Wie/
L: Die hat das einfach logisch da hingeschrieben
B: Zählt Warte 1 – 2 – 3 – 4 · · ·
Mehrere: 4 – 5 – 6
L: Hä/
F: Das ist ja auch eine Funktion neunten Grades
L: Ah
S: Das ist ´ne Funktion vierten und fünften Grades
B: ne das ist eine von der Art
L: Ja aber
B: Wir geben einfach mal eine ein – wir hatten doch eine als Beispiel
F: Nimm doch die hier - ist doch egal
B: Nicht so ´ne Normale - dann hast du so eine wie hier \
F: Ja – ja ja ok
B: Am besten so eine – am besten noch ein Vorzeichen davor oder so
F: drei X hoch -
S: fünf X
B: Am besten noch eine drei davor oder so – damit die nicht normal wird
S: Guck mal – so weit bin ich schon mal
L: Was hast du da für eine eingegeben/
S: Ja – bringt einem ja überhaupt nichts
B tippt L: Ich hab drei 3x hoch 5 minus 4x hoch 3 plus 4x
F: ich hab 3x hoch 5 minus 12x
Rechnen – Tippen – Nachschlagen in Heften L: die sieht natürlich ganz toll aus
F: Guck mal wie die hier aussieht
Zeit: 4846 S: Ich hab Hunger auf gegrilltes Hähnchen
L: Ja – geil mit Kartoffeln - ne besser mit Reis
S: So eins von einem Grillstand
· · ·
F: Warum funktioniert das nicht – warum sieht die so komisch aus/
B: Die ist blöd
S: Hat jemand ein Bonbon/
B: Ah – da ist die Funktion ja wieder
F: ich such mal ein Beispiel
B: Ja guck mal ob du da eins findest

S: Will noch jemand ein Kaugummi/
L: So sieht die aus
S: Super Linda
F: Ja so eine habe ich auch
. . .
B: Meiner Meinung nach hat die ja nur zwei – die muss ins Unendliche hochgehen
. . .
B: Das hilft uns nur nicht – so eine hatte ich auch schon mal
L: Die geht auch glaub ich ins unendliche runter
B: Ja das auch – aber die hat doch jetzt mehrere Wendepunkte
L: Ja – siehst du hier nicht – das ist übel
S: Das könnte eine fünften Grades sein *zeigt auf Graph im Schülermaterial, vgl. S. 27* 1 – 2 – 3 - oder nicht/
Vom Nachbartisch wird B gerufen
B: Ja/
. . .
B: Ja wir sind immer im Film
L: B hat schon peinliche Sachen gesagt und das hört man alles
Nachbartisch: Erzählt mal einen Witz
L erzählt Witz von einer Schnecke
B tippt unentwegt – F blättert im Buch
S und L plaudern
S: Wir kommen nicht weiter
B: *Zur Kamerafrau* Könnten Sie uns mal eine schöne Funktion fünften Grades geben/
K: Geben sie doch mal ein – haben Sie ein Schmierblatt – ich schreib Ihnen eine auf
K schreibt auf $x(x^2-1)(x^2-2)$ -müssen sie nur ausmultiplizieren – das ist eine fünften Grades - aber die können sie auch so eingeben
B: Schön *Tippt die Funktion ein*
K: Haben das die anderen auch gesehen/
L: Machst du das im Home/
K: Ist Ihnen klar – dass das eine fünften Grades ist/
B: Ja – da sind ja fünf Xe drin
K: Ich sehe drei
B: Ich sehe fünf
K: Ja – ok
K: Vielleicht ist es auch ganz gut – wenn sie hinten noch 0 – 1
B: Anstatt der zwei/
L: Was hast du bei dir stehen/ - Was hast du da vorne stehen
B: Komm zeichne dich
L: Das sieht doch genauso blöde aus
K: Was haben Sie eingegeben/
L: Das war das jetzt hier
K nimmt sich TR und tippt Was haben sie für eine Einstellung/ - Da machen wir mal

was weg
L: Das sah eben noch anders aus
K: Das ist immer noch nicht so – wie ich Ihnen das geben wollte Aber Sie wissen – was ich hier eingebe/
L: Ne – gar nicht
K: Ich mache das Umformungszeichen - *Erklärt L den TR*
K: Das ist aber jetzt die einzige
L: Ja – die anderen habe ich extra weggemacht
K guckt weiter nach dem TR
L: Soll ich sonst einfach ein bisschen weiter probieren – Sie machen ja sonst meine Arbeiten – nicht dass das dann nachher Ärger mit der Frau K gibt – weil das ja aufgezeichnet wird
K: Eigentlich muss ich Ihnen ja etwas Gutes tun
L: Ja – ok aber ich habe ja jetzt einen Anfang
F: wie überträgt man das in den y-Editor/
B: Du hast das unten in Home stehen und dann machst du auf store und dann schreibst du y5 oder wo bei dir leer ist Klammer auf - Klammer zu
L: Ich glaube wir haben da schon eher was
B. 1 – 2 – 3 – 4 – das würde doch passen
B: vier Extrempunkte – drei Wendepunkte – fünf Nullstellen
L: das ist aber nicht - das sind keine fünf Nullstellen
B: Ne – aber das könnten fünf sein – wenn das ganz schwanken würde und immer durch die X Achse gehen würde
F: die maximale Anzahl
...
B: Das wollte Steffi machen
F: Ach – das wolltest du machen/
S: Nein – jetzt nicht mehr
B: fünf – dann sind das vier und das
S: und drei Wendepunkte
B: So drei
L: Wo seid ihr/
B: Dann nehmen wir als Regel – als vermutliche Regel
S: Wie sollen wir das jetzt aufschreiben/
F: Das macht die B jetzt
B: Vermutliche Regel: Aus dem Grad der Funktion kann man die Nullstellen ablesen
L: Kann man die maximale Anzahl der Nullstellen ableiten
S: Also die Anzahl der Nullstellen entspricht dem Grad der Funktion
ZEIT: 10100 L: Schreiben wir das doch erst mal da hin – oder nicht/
S: Minus eins der Nullstellen - und Minus zwei ergibt die Anzahl der Wendepunkte
F: Weiter geht es
S: Subtrahiert man von dieser Zahl eins hast du die Extrempunkte minus zwei haste die Nullstellen

B: Die Anzahl der Extrempunkte ist je eins weniger als die Anzahl der Nullstellen
F: Subtrahiert man von der Anzahl der Nullstellen eins – erhält man die Anzahl der Extrempunkte
B: Wiederholt man dieses erhält man die Anzahl der Wendepunkte
S: Ich würde eigentlich immer von dem Grad der Funktion ausgehen – ist doch dann einfacher
B: wir können das auch gleich mal als Formel aufschreiben – das ist dann viel einfacher
L: Ich versteh nicht – was du da überhaupt jetzt - was willst du denn jetzt schreiben/
B: Subtrahiert man den Grad minus eins
S: Subtrahiert man eins von dem Grad
· · ·
Lehrerin: *macht Ansage an die ganze Klasse*· · · Bausteine L E K vielleicht noch N dazu
S: Ja klar
B. X hoch n gleich n minus eins gleich Anzahl der Extrempunkte
S: und n minus zwei gleich Anzahl der Wendepunkte
L: Was hast du da stehen – n gleich Nullstellen/
B: Ja
S: Was sind Hausaufgaben/
L: Wir müssen bis N kommen
B: Wir müssen die Protokolle schreiben
F: Du kannst das mitnehmen und gucken
B: Dann machst du A und dann machst du L und E und K müssen wir auch noch machen *Zu F* Dann können wir uns E und K angucken – dann können wir das nächstes mal schon machen
L: Bis N oder einschließlich N?

Alle vier packen ein

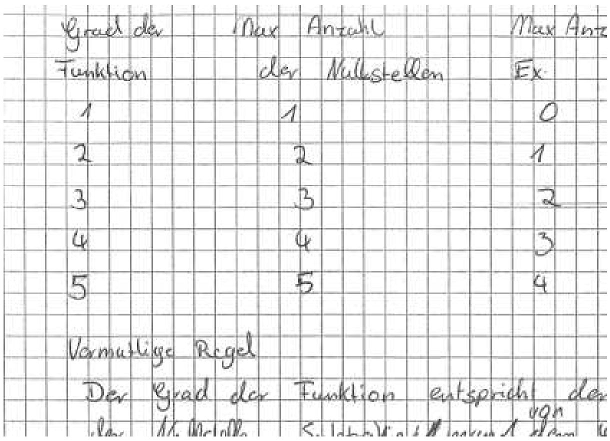


Abbildung E.12: Hefteintrag von B

Anhang F

Analyse-Tabellen

Folgende Kürzel werden in der Tabelle zur Vodesequenz „Legespiel“ verwendet:

- I – **i**soliert dastehende, von anderen unabhängige, assoziative Äußerung
- G – eine auf den anderen **G**erichtete, assoziative Äußerung
- AE – argumentative Äußerung, die hauptsächlich durch den eigenen Gedankengang geprägt ist
- AA – argumentative Äußerung, die durch die Vorstellungen und Äuperungen der Gesprächspartnerin beeinflusst ist
- Z – zusammen formulieren

Mit „Punkt-Strategie“ ist hier gemeint, dass die Betrachtung exponierter Punkte als Basis genutzt werden, um die Zusammengehörigkeit der Graphen zu erkennen. Daneben bedeutet „Steigungs-Strategie“ entsprechend, wenn die Betrachtung des Graphenverlaufs und insbesondere die Art der Steigung als Lösungsstrategie verwendet wird.

Tabellen zur Video-Sequenz „Wendepunkt“

Zeile	Komm. Handlung	Äußerung/ Aktion	Referenzkontext	Begriffsbildung (P)	Begriffsbildung (U)
1-4	G				
5f	AE(P) Festhalten	nach oben und unten verschieben	Erinnerung		
7-9	G				
10-12	AA(U)	verschieben, wie du willst, es bleibt immer im negativen Bereich	K4		unklar, ob sie meint, dass sich die Steigung beim Verschieben nicht verändert oder ob die Werte im negativen Bereich bleiben
13	AA(P)	stimmt, Steigung muss im negativen Bereich sein	U´s Erklärung in 10-12	Ergänzung der Vorstellung der Verschiebung des Verlaufs; Korrektur, Ergänzung, Bereicherung	
14-21	G (u.a. Impuls von U)		K1, K4		
22-24	AE(P) Zusammenhänge analysieren			Festigung	
25-34	G		K2		
35f	AE(P) Argumentieren	..wenn in der 2. Ableitung der Graph im negativen Bereich ist, dann muss in der ersten Ableitung der Graph fallend sein	K2	Festigung	
37-39	AE(U) Analysieren	der nach der geht ..nicht, weil die sind beide steigend	K1a, K2		Mögliche Fehlvorstellung: Zusammenhang zwischen Steigung der Graphen von f und f´
40-43	I(U)				
44	AE(U)	EP gucken			Betrachtung der EP ist sicherer Weg
45f	AA(P) argumentieren	widersprechen	Erfahrung, dass Betrachtung EP irreführend ist	Betrachtung EP ist irreführend	

Tabelle F.1: Analyse-Schema zum Transkript „Legespiel“, 1. Phase

Zeile	Komm. Handlung	Äußerung/ Aktion	Referenz-kontext	Begriffsbildung (P)	Begriffsbildung (U)
47	AA(U)	Nee, kannst du aber genau sagen			Nutzen der Erkenntnis, dass Punkt-Strategie genaue Aussagen ermöglicht
48-52	AE(U)	Durchführen der Punkt-Strategie			
53-59	AA(U)	Steigungs-Strategie			Fehlvorstellung: Fallender Graph bei f entspricht fallendem Graph bei f´
60-63	AA(P)	Wendepunkt			
66-68	AE(P)	Steigungs-Strategie		Anwenden der Steigungs-Strategie	
69f	Z	Steigungs-Strategie			
71-76	AE(P)				
77-80	AE(U)	Punkt-Strategie			Anwenden der Punkt-Strategie
81	AE(P)				
82f	AA(U)		Zeile 66-81		1. Korrektur der Fehlvorstellung
85f	AE(P)				
87f	AA(U)				Fehlvorstellung wieder genutzt
89f	AA(P)	fragt gezielt nach U´s Fehlvorstellung: „Fällt der denn an der gleichen Stelle?“, lässt es offen	U´s Fehlvorstellung	zwar fragend, aber nivellierend	
91-95	AE(P)	Punkt-Strategie; 1. Set gefunden			

Tabelle F.2: Analyse-Schema zum Transkript „Legespiel“, 2. Phase

Zeile	Komm. Handlung	Äußerung/ Aktion	Referenz-kontext	Begriffsbildung (P)	Begriffsbildung (U)
96-108	G	U aktiv bei der Suche nach neuem Set			
111f	AA(U)				2. Korrekturansatz der Fehlvorstellung; scheint überwunden
113	G				
114	G/Z	U initiiert Steigungsbetrachtung zu Graph von f´		Verwechslung, ob Steigung zum Graphen von f oder f´betrachtet wird	
117	G	P übernimmt; führt zum Ausschluss einer richtigen Karte			
118-122	G	Impuls: neue Karten werden untersucht, ob sie zu K4 passen (Punkt-Strategie)	K5a, K4		
123	G	Impuls: U wendet Punkt-Strategie auf neue Karte an			
124	G	Frage von P: „Wie auf Extremstelle gucken?“	Zeile 123		
125-130	AA(U)	erklärt´s am Beispiel	K4		
131-135	Z	Punkt-Strategie	K7, K8	gezieltes Fragen nach Punkt-strategie	Anwenden (Erweiterung des Handlungsspielraumes)
139	G	Impuls von U; Gucken nach neuem Set	K8, K9		
140-143	AE(P)		K8, K9	erneutes Anwenden der neuen Strategie	
144-149	AE(U)	Punkt-Strategie	K8, K9		
150	G	Nachfragen von P	Z149	Bestätigung suchend	
157	G	Impuls von P: weitere Kriterien?		scheint unzufrieden mit der alleinigen Anwendung der Punkt-Strategie	
158	G	welche weiteren Kriterien bei einer Geraden?			
160f	Z	K7 wird bestätigt			
165ff	AA(U)	erklärt Steigungs-Strategie korrekt	K8, K9		Erweiterung des Handlunbgsspielraums

Tabelle F.3: Analyse-Schema zum Transkript „Legespiel“, 3. Phase

Zeile	Komm. Handlung	Äußerung/ Aktion	Referenz-kontext	Begriffsbildung			
				F	L	B	S
218	Initiieren	F: Vorlesen der Aufgabe					
223	Rezipieren	F: ..ist auch ein Sattelpunkt	Abbildung 9.6	WP ist Sattelpunkt; kein Hoch- und Tiefpunkt			
230	Ergänzen zu F	L: oder ein Hoch- und Tiefpunkt	Zeile 223 und Abbildung 9.6		WP ist Hoch- oder Tiefpunkt		
231	Erklären für L	F: **Nein**, kein Hoch- und Tiefpunkt ··· Steigung 0	Zeile 230; Erinnerung an vorherigen Unterricht	WP ist Sattelpunkt, Steigung 0			
250	Ergänzen/ neuer Aspekt	B: ..von einer Rechtskurve ine eine Linkskurve übergeht···	Erinnern an vorherigen Unterricht			WP als Änderung der Kurvenart	
257	Verifizieren	L: *guckt auf ihren Rechner* dann ist das ja mal da tief und mal hoch nee ···	Rechnerbild		WP ist EP; EP liegt außerhalb des Bildes		
261	Erklären für L	F: Nein nicht da oben da oben ist der Hochpunkt···	Zeile 257; L´s Rechnerbild	WP ist kein EP			
265	Nachfragen; Argumentieren	L: Das hier ist doch so ein Sattelpunkt – da und da oder nicht/ so ein Wendepunkt da geht es wieder runter und da wieder hoch *macht U-förmige Handbewegung am Rechner, stockt am unteren Minimum*	Zeile 261; Rechnerbild		WP als EP, Wenden der Steigung		
268	Ergänzen; Erinnern	B: Das ist so wie bei der einen Aufgabe die wir gemacht haben – mit dem mit der Produktion das war da ja auch so –	Erinnern an Produktionsaufgabe	Bestätigung ihrer Vorstellung	evtl. erste Korrektur ihrer Vorstellung	WP im Graphen zur Produktionsaufgabe	
271	Ergänzen	B: da war es ja auch so ein Wendepunkt weil das auch ja auch nur **einer** war	Erinnern an Produktionsaufgabe			**Ein** WP im Graphen zur Produktionsaufgabe	

Tabelle F.4: Analyse-Schema zum Transkript „Wendepunkt“, 1. Phase

Zeile	Komm. Handlung	Äußerung/ Aktion	Referenz-kontext	Begriffsbildung			
				F	L	B	S
471	Erklären, Veran-schau-lichen	B: Extrempunkte sind das wo diese Wende-punkte sind	Z 470			EP und WP gehören zusam-men	
276	Nach-fragen	L: da wo das am höchsten ist	Zeile 274		EP: am höchsten		
277	Erwidern zu B	F: Nein	Z 274	EP und WP sind verschie-den			
278	Bestätigen	B: nicht die Wende-punkte *Armbewegung*	Z 277				
285	Ergänzen/ neuer Aspekt	B: sind doch auch auto-matisch rechts *Handbe-wegung*	vorheriger Unter-richt			Hochpunkt hat Rechts-kurve	
287	Ergänzen/ neuer Aspekt	F: Steigung 0	Vorherige Aspekte				
292	Nach-schlagen, Be-stätigung suchen	F sieht passende Stelle im Buch					
310	Analy-sieren, Problem pointie-ren	B: Das wendet doch da auch von einer Rechts- in eine Linkskurve	Abb. 9.9			Verwirrung, da WP hier keine waage-rechte Tangente hat	
313	Resig-nieren, Aufgeben	B: Das mit der Rechts- oder Linkskurve ist eh Scheiße					
315	Veran-schau-lichen	L: wie bei Formel 1 - erst nach rechts dann nach links	Z 313, Vorheri-ges		Richtung ist maß-geblich		
318	Wieder-auf-greifen	B: da wechselt es ja auch so von den Kurven	Abb. 9.9			Im WP wechselt die Kurve auch - nicht nur im EP!	
323	Problem pointie-ren	B: wie ist denn dort die Tangentensteigung	Abb. 9.9			WP muss nicht un-bedingt Tangen-tenstei-gung 0 haben	

Tabelle F.5: Analyse-Schema zum Transkript „Wendepunkt“, 2. Phase

Zeile	Komm. Handlung	Äußerung/ Aktion	Referenzkontext	Begriffsbildung			
				F	L	B	S
553	Veranschaulichen, Vergewissern	B: ob das da zum Beispiel ein WP ist	Abb. 9.9			WP wird als besonderer Punkt erkannt und gezeigt	
557	Problem pointieren	B: die Steigung nicht 0	Z 556			Besonderheit des WP hängt nicht mit Steigung zusammen	
558	Erwidern	S: Das stimmt aber ich auch eher – dass WP	Vorheriges Abb.9.9				WP=EP
560	Widersprechen	F: Nee – der WP ist da	Z 558, Abb.9.9	WP unterscheidet sich deutlich von EP			
562	Argumentieren	S: ab da (HP) wechselt es ja die Richtung	Z 560				WP=EP
564ff	Argumentieren	B: da (HP) wechselt es einmal da oben – aber ab da (WP) wechselt es doch auch	Z 562			Es wechselt im EP und im WP	
571ff	Argumentieren, Veranschaulichen	B: eine Kurve nach dort – eine nach hier	Z 570			Kurvenwechsel im WP	
574ff	Argumentieren, Erwidern	S: geht es runter und da geht es wieder hoch	Z 571				WP=EP, da Richtungswechsel

Tabelle F.6: Analyse-Schema zum Transkript „Wendepunkt“, 3. Phase